MAGNITUDES, RAZÓN Y PROPORCIÓN

Magnitud

Se entiende por **magnitud** todo aquello que se puede **medir** y, como consecuencia, asignar diferentes valores de acuerdo al resultado de la medición.

Son magnitudes la **Longitud**, la **Masa**, la **Temperatura**, el **Volumen**, el **Valor económico** o **Importe**, el **Número de habitantes** de una localidad, etc. No son magnitudes la amistad, el dolor, la alegría, etc.

Razón

Entre los valores correspondientes de dos magnitudes relacionadas se puede establecer una **razón**. Las razones se expresan en forma de división indicada (a/b). El cociente de esa división es el **valor** de la razón.

<u>Ejemplos</u>

50 kilógramos de patatas (magnitud **Masa**) valen 45,20 € (magnitud **Importe**). Entre los valores de ambas magnitudes se pueden establecer dos razones:

- Razón de la magnitud **Importe** a la magnitud **Masa**:

$\frac{Importe}{Masa} = \frac{45{,}20\,€}{50\,\text{kilógramos}} =$ **0,90 € / kg** (euros que cuesta cada kilógramo; esta razón define el concepto de **precio**).

- Razón de la magnitud **Masa** a la magnitud **Importe**:

$\frac{Masa}{Importe} = \frac{50\text{ kilógramos}}{45{,}20\text{ €}} =$ **1,11 kg / €** (kilógramos que se pueden comprar con un euro).

Un automóvil ha recorrido 750 kilómetros (magnitud **Longitud**) en 7 horas (magnitud **Tiempo**). Entre los valores de ambas magnitudes se pueden establecer dos razones:

- Razón de la magnitud **Longitud** a la magnitud **Tiempo**:

$\frac{Longitud}{Tiempo} = \frac{750\,\text{km}}{7\,\text{horas}} =$ **107,14 km / h** (kilómetros recorridos en una hora; esta razón define el concepto de **velocidad**).

- Razón de la magnitud **Tiempo** a la magnitud **Longitud**:

$\frac{Tiempo}{Longitud} = \frac{7\,\text{horas}}{750\,\text{km}} =$ **0,009 h / km** (horas empleadas en recorrer un kilómetro; como esta medida es poco comprensible, se pasan las horas a segundos: 0,009 × 60 × 60 = 32,4 segundos) El valor de la razón sería **32,4 segundos / km** (emplea 32 segundos y 4 décimas de segundo en recorrer 1 km).

Las dos razones establecidas en cada uno de los casos son **inversas**:

- La razón $\frac{Importe}{Masa}$ es inversa a $\frac{Masa}{Importe}$ y viceversa
- La razón $\frac{Longitud}{Tiempo}$ es inversa a $\frac{Tiempo}{Longitud}$ y viceversa

Como se puede ver en los ejemplos anteriores, el enunciado de la razón es muy importante. No es lo mismo "**La razón del importe a la masa**" que "**la razón de la masa al importe**".

SIEMPRE, el **primer término** de la razón es el valor de la **magnitud enunciada en primer lugar** y **segundo término**, el valor de la **magnitud enunciada en segundo lugar**.

Las razones se diferencian de las fracciones en que sus términos pueden ser **números con cifras decimales** (negativos o positivos), mientras que en una fracción solamente puede haber **números enteros** (negativos o positivos.

$\frac{7}{8}$ puede ser un razón y una fracción. $\frac{7,5}{8}$ solamente puede ser una razón.

Ejercicio 1

Un grifo ha vertido 1.200 litros de agua (magnitud VOLUMEN) en 5 horas (magnitud TIEMPO).

a) Escribe la razón del valor de la magnitud Volumen al valor de la magnitud Tiempo, calcula el valor de la razón y explica el significado de su valor.

b) Escribe la razón inversa a la anterior, calcula su valor y explica el significado de su valor.

Ejemplos de la página 45

Ejercicios "Relaciona" y "Elige la correcta" de la página 45.

Proporción

Dos razones son equivalentes cuando tienen el mismo valor. La igualdad de dos razones recibe el nombre de **proporción**, se expresa $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ y se lee "**A es a B como C es a D**".

<u>Ejemplo</u>

$\frac{9}{6}$ *y* $\frac{15}{10}$ son razones equivalentes porque ambas razones tiene el mismo valor $\frac{9}{6} = 1,5$ y $\frac{15}{10} = 1,5$

Por lo tanto puede escribirse la igualdad $\frac{9}{6} = \frac{15}{10}$, que recibe el nombre de proporción

A las proporciones pueden aplicarse las mismas propiedades de las fracciones.

- En la proporción anterior se cumple que 9 × 10 = 90 y que 6 × 15 = 90
- Las razones $\frac{9}{6}$ y $\frac{15}{10}$ pueden simplificarse y sustituirse por la razón $\frac{3}{2}$.

En una proporción, el valor de las razones que la forman, que es el mismo para todas, recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**.

En la proporción anterior $\frac{9}{6} = \frac{15}{10}$, la constante de proporcionalidad es 1,5.

Ejercicios "Elige las correctas" de la página 46 (los dos).

Ejemplos de la página 47. En esta página hay un error; debería decir (en negrita y subrayado)

100/160 = 1/1,6. Consumen 1 m^3 de agua por cada 1,6 habitantes; gastando ***<u>más</u>*** *agua…*

Ejercicio "Práctica" de la página 48. Se llama "cuarto proporcional" al valor de la proporción que falta y que está representado con la letra ***x***.

Error. La solución del ejercicio **a** es **<u>12</u>**, NO 4 como se indica en el libro

Todos los ejercicios de la página 49

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Las magnitudes entre cuyos valores pueden establecerse proporciones reciben el nombre de **proporcionales**. Ejemplos:

- En el caso de un grifo (río, fuente…) pueden establecerse proporciones entre los valores de la magnitud **volumen** de agua vertido y la magnitud **tiempo** empleado. El valor de las distintas razones forman la magnitud **caudal**. Se define **caudal** como el **volumen vertido en la unidad de tiempo** y puede expresarse ***en litros / hora***, ***litros / segundo***, etc.
- En el caso de un objeto que se mueve, pueden establecerse proporciones entre los valores de la magnitud **espacio** recorrido y la magnitud **tiempo** empleado. El valor de las distintas razones forman la magnitud **velocidad**. Se define **velocidad** como el **espacio recorrido en la unidad de tiempo** y puede expresarse en ***km / h***, en **m / s** (s = segundo), etc.
- En el caso de un aparato eléctrico, pueden establecerse proporciones entre los valores de la magnitud **consumo** o **trabajo** realizado y la magnitud **tiempo** empleado en realizar ese trabajo o consumo. El valor de las distintas razones forman la magnitud **potencia** del aparato eléctrico. Se define **potencia** como el **consumo o trabajo realizado en la unidad de tiempo** y puede expresarse en vatios (w) y kilovatios (Kw).

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando un aumento en una de ellas determina un aumento en la misma razón en la otra y cuando una disminución en una determina una disminución en la misma razón en la otra.

Ejemplo

La “cantidad” de naranjas y su “valor económico” son dos magnitudes directamente proporcionales, ya que a un aumento de la cantidad de naranjas corresponde un aumento en la misma razón de su valor económico, y una disminución de la cantidad de naranjas corresponde una disminución en la misma razón de su valor económico.

Magnitud “Cantidad”	**Magnitud “Valor económico”**
3 kilogramos	2,25 euros
5 kilogramos	3,75 euros
12 kilogramos	9,00 euros

Las razones que pueden establecerse entre la magnitud “**Cantidad**” y la magnitud “**Valor económico**” son:

$$\frac{3\text{ kilogramos}}{2{,}25\text{ euros}} = 1{,}3\text{ Kg / €} \qquad \frac{5\text{ kilogramos}}{3{,}75\text{ euros}} = 1{,}3\text{ Kg / €} \qquad \frac{12\text{ kilogramos}}{9{,}00\text{ euros}} = 1{,}3\text{ Kg / €}$$

El cociente de todas las razones es el mismo. En este caso nos indica “**los kilogramos de naranjas que se podrán comprar con 1 euro”**.

Las razones que pueden establecerse entre la magnitud “**Valor económico**” y la magnitud “**Cantidad**” son:

$$\frac{2{,}25\text{ euros}}{3\text{ kilogramos}} = 0{,}75\text{ € / kg} \qquad \frac{3{,}75\text{ euros}}{5\text{ kilogramos}} = 0{,}75\text{ € / kg} \qquad \frac{9{,}00\text{ euros}}{12\text{ kilogramos}} = 0{,}75\text{ € / kg}$$

El cociente de todas las razones es el mismo. En este caso nos indica “**los euros que cuesta un kilogramo de naranjas”**, es decir, el **precio**.

En las magnitudes directamente proporcionales, el valor de las distintas razones (cociente entre los valores correspondientes de ambas magnitudes) es constante y recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

Ejercicio 2

Un barco navega durante 5 horas. Durante la navegación, el capitán ha realizado unos cálculos y ha establecido la siguiente tabla:

Tiempo de navegación	Distancia recorrida
3 horas	75 kilómetros
3,5 horas	87,5 kilómetros
4 horas	100 kilómetros
4,25 horas	106,25 kilómetros

a) Escribe las razones de las distintas distancias recorridas al tiempo empleado en recorrerlas. Calcula la constante de proporcionalidad y explica su significado.

b) Escribe las razones de los distintos tiempos a la distancia recorrida que corresponde a cada una. Calcula la constante de proporcionalidad y explica su significado.

Ejercicios de la página 52 (los tres).

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando un aumento en una de ellas determina una disminución en la misma razón en la otra, y una disminución en una de ellas determina un aumento en la misma razón en la otra.

Ejemplo

Tres vehículos realizan el mismo trayecto a distinta velocidad empleando los tiempos que se indican:

Vehículo	**Magnitud "Velocidad"**	**Magnitud "Tiempo"**
A	60 km/hora	3 horas
B	90 km/hora	2 horas
C	120 km/hora	1,5 horas

La **velocidad** a la que se circula y el **tiempo** empleado en recorrer un **determinado trayecto** son magnitudes **inversamente** proporcionales. **"A mayor velocidad, menor tiempo; a menor velocidad, mayor tiempo"**.

La constante de proporcionalidad, lo que no varía, es el trayecto realizado y se obtiene multiplicando un valor de la magnitud "**Velocidad**" por su correspondiente de la magnitud "**Tiempo**":

$$60 \text{ km/hora} \times 3 \text{ horas} = 90 \text{ km/hora} \times 2 \text{ horas} = 120 \text{ km/hora} \times 1{,}5 \text{ horas} = \mathbf{180\ km}$$

En las magnitudes inversamente proporcionales, la constante de proporcionalidad es igual al producto de los valores correspondientes de ambas magnitudes.

Ejercicio 3

El dispositivo de apertura de un grifo tiene cuatro posiciones. Según la posición del dispositivo de apertura, los tiempos de llenado del depósito que alimenta son los siguientes:

Posición	**Caudal del grifo**	**Tiempo de llenado**
A	5 litros/minuto	150 minutos
B	7,5 litros/minuto	100 minutos
C	10 litros/minuto	75 minutos
D	12,5 litros/minuto	60 minutos

a) Calcula la constante de proporcionalidad y explica su significado.

b) Se cambia el grifo por otro con una posición más de apertura (E) con un caudal de 15 litros/minuto. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito con el grifo abierto en la posición E?

c) ¿Qué caudal debería suministrar un grifo para llenar el depósito en 40 minutos?

Ejercicios de la página 54 (los tres).
Ejercicios "Elige la correcta" de la página 58 (los dos)

Entre tres magnitudes relacionadas entre sí se pueden establecer **dos** relaciones de proporcionalidad directa y **una** relación de proporcionalidad inversa.

Ejemplos

Magnitudes	Relación de proporcionalidad entre ellas	Expresión matemática
Espacio Tiempo Velocidad	Entre la distancia recorrida y el tiempo empleado: **proporcionalidad directa**	$\frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} = \text{Velocidad}$
	Entre la velocidad a la que se circula la y la distancia recorrida: **proporcionalidad directa**	$\frac{\text{Espacio}}{\text{Velocidad}} = \text{Tiempo}$
	Entre la velocidad a la que circula y el tiempo empleado: **proporcionalidad inversa**	Velocidad × Tiempo = Espacio

Magnitudes	Relación de proporcionalidad entre ellas	Expresión matemática
Consumo o Trabajo Tiempo Potencia	Entre la consumo o trabajo realizado y el tiempo de funcionamiento: **proporcionalidad directa**	$\frac{\text{Trabajo o Consumo}}{\text{Tiempo}} = \text{Potencia}$
	Entre el consumo o trabajo realizado y la potencia del aparato: **proporcionalidad directa**	$\frac{\text{Trabajo o Consumo}}{\text{Potencia}} = \text{Tiempo}$
	Entre la potencia del aparato y el tiempo de funcionamiento: **proporcionalidad inversa**	Potencia × Tiempo = Consumo

Ejercicio 4

Escribe **directa** o **inversa** según sea la proporcionalidad entre magnitudes que se da en cada caso. Las magnitudes que se comparan y son variables están en **negrita** y la que permanece constante o invariable están en cursiva y subrayada

1. La **velocidad** de un móvil y el **espacio** recorrido en un ***<u>tiempo</u>*** constante.
2. El **espacio** recorrido y el **tiempo** empleado en recorrerlo por un móvil que circula a ***<u>velocidad</u>*** constante.
3. El **tiempo** que emplea un móvil en recorrer un ***<u>espacio</u>*** constante y la **velocidad** a la que circula.
4. El **número de personas** que hay una residencia y la **cantidad de alimentos** necesarios para alimentarlas durante ***<u>tiempo</u>*** determinado, por ejemplo un mes.
5. El **número de personas** que hay en una residencia y el **tiempo** que pueden comer con una ***<u>cantidad</u>*** determinada de alimentos.
6. La **cantidad de alimentos** necesarios para un ***<u>número</u>*** determinada de personas y el **tiempo** que se tarda en consumirla.
7. El **caudal** de agua que sale por un grifo y el **tiempo** necesario para verter una ***<u>cantidad</u>*** determinada de agua, por ejemplo llenar un depósito.
8. El **volumen** de agua vertida por un grifo y el **tiempo** que permanece abierto si el ***<u>caudal</u>*** del mismo permanece constante.
9. El **caudal** de agua que vierte un grifo y la **cantidad de agua** que echará en un depósito en un ***<u>tiempo</u>*** determinado.

10. El **número de obreros** que realizan un determinado ***trabajo*** y el **dinero** que les corresponderá a cada uno por hacerlo.
11. El **número de máquinas** que fabrican tornillos y la **cantidad de tornillos** que fabricarán en un ***tiempo*** determinado.
12. El **número de máquinas** y el **tiempo** necesario para fabricar una ***cantidad de tornillos*** determinada.
13. La **cantidad de tornillos** y el **tiempo** que necesitará un ***número de máquinas*** determinado para fabricarlos.
14. La **potencia** de un electrodoméstico y el **tiempo** de funcionamiento del mismo si se quiere mantener constante el ***consumo***.
15. El **consumo** energético de un electrodoméstico y el **tiempo** de funcionamiento si su ***potencia*** es invariable o constante.
16. El **consumo** energético de un electrodoméstico y su **potencia** si el ***tiempo*** de funcionamiento es constante.

ESCALA DE UN PLANO

Escala es la **razón entre el tamaño del dibujo de un objeto y el tamaño real del objeto**, cuando entre ellos existe una relación de proporcionalidad.

$$\text{Escala} = \frac{\text{dimensión del objeto en el dibujo}}{\text{dimensión del objeto en la realidad}}$$

La escala se expresa siempre mediante la razón de una unidad del plano a su medida equivalente en la realidad.

$$\text{Escala} = \frac{\text{una unidad en el plano}}{\text{número de unidades en la realidad que corresponden a una unidad en el plano}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}$$

La manera más habitual de expresar una escala es en la forma **1 : N**. Así, si la escala de un plano es **1 : 1.200**, significa que **1 unidad** del plano equivale a **1.200 unidades** de la realidad.

En el caso de planos que representan objetos muy pequeños y cuyo dibujo es mayor que el objeto real, las escalas se expresan indicando la razón de **las unidades del plano** correspondientes a **una unidad de la realidad**.

$$\text{Escala} = \frac{\text{número de unidades en el plano}}{\text{una unidad en la realidad}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{1}}$$ o también **N : 1**.

Así, si una escala es **50 : 1**, quiere decir que **50 unidades** del plano equivalen a **1 unidad** de la realidad.

Lo normal es que manejemos planos que representan objetos mucho mayores que su dibujo en el plano como por ejemplo el plano de máquinas, el plano de una vivienda, el plano de una ciudad, el mapa de un país, etc. Las escalas más utilizadas son:

- Para una vivienda, las escalas más utilizadas están comprendidas entre 1:50 y 1:100. Quiere decir que 1 cm del plano (normalmente se mide en centímetros) es igual a 50 ó 100 cm de la realidad.
- En el caso de ciudades y comarcas, la escala está comprendida entre 1:10.000 y 1:50.000.
- En el caso de regiones y países poco extensos, la escala está comprendida entre 1:50.000 y 1:500.000.
- En el caso de países grandes, continentes y mapas del mundo, la escala está comprendida entre 1:500.000 y 1:50.000.000.

La escala nos indica **las veces** que el dibujo es **más pequeño o más grande** que el objeto real

Ejemplo

Tenemos un plano de una vivienda en el que no consta la escala. Un dormitorio tiene 4 m de largo y 3,5 m de ancho. En el plano, las medidas son 8 cm y 7 cm respectivamente.

a) ¿Cuál es la escala del plano?

Antes de realizar cualquier cálculo, es necesario que las medidas estén en la misma unidad.

$\frac{\textit{Medida del objeto real}}{\textit{Medida del objeto en el dibujo}} = \frac{400\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = \frac{350\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} = 50$ veces que las medidas reales son mayores que las del plano. Por tanto la escala será **1 : 50**

b) ¿Cuál será la longitud en el plano del pasillo si mide 12 metros en la realidad?

12 m = 1.200 cm;

Como en el plano será 50 veces más pequeño, 1200 cm **:** 50 = 24 cm que mide la línea en el plano.

c) En el plano, la anchura de la cocina es 4,5 cm. ¿Cuánto mide en la realidad?

La medida real de la cocina será **50 veces más grande** que en el plano. Por lo tanto:

4,5 cm **×** 50 = 225 cm = 2,25 m

Ejercicio 5

En el plano de un edificio, el tejado tiene una longitud de 8,5 cm. Se sabe que la medida real del tejado es de 21,25 m.

a) Calcula la escala del plano.

b) Calcula la medida real de una ventana que en el plano tiene una altura de 6 mm.

c) ¿Qué medida tendrá en el plano la puerta de entrada del edificio si en la realidad mide 3,5 m?

PORCENTAJE

Mediante la forma “porcentaje” se puede expresar:

A. La parte de una cantidad que interesa.

B. La **razón entre una parte y el todo** al que pertenece, expresando la totalidad con el número 100.

C. El aumento o la disminución de los valores de una magnitud. Ejemplo: el beneficio de una empresa aumentado un 3% respecto del año anterior.

A. La parte de una cantidad

Ejemplo 1

Calcular el 16% de 34.500 €

El porcentaje se calcula de forma análoga a la fracción de una cantidad

16 % de 34.500 € = $\frac{34.500}{100} \times 16 =$ **5.520 €** ó también $\frac{34.500 \times 16}{100} =$ **5.520 €**

Empleando la función “porcentaje” de la calculadora:

34500 **×** **16** **%** **5.520 €**

ATENCIÓN. En algunas calculadoras hay que pulsar la **tecla =** después de la **tecla %**.

Un ejemplo habitual de porcentajes es la expresión de recargos, descuentos e impuestos como el IVA.

El IVA es un impuesto indirecto (no se aplica sobre la renta de las personas) que **grava el consumo de cualquier producto o servicio**. Hay diferentes tipos de IVA; los vigentes en la actualidad son:

- **IVA general (21%)**. Es el porcentaje que se aplica por defecto a todos los productos y servicios: electrodomésticos, ropa, calzado, electricidad, teléfono, material de oficina, espectáculos, peluquería, automóviles, combustibles, productos de cosmética, alcohol, tabaco, servicios funerarios, servicios veterinarios, reparaciones, etc.

- **IVA reducido (10%)**. Alimentos en general (excepto los que soportan un IVA superreducido); viviendas; agua para consumo y regadío; transporte de viajeros; recogida y eliminación de residuos; servicios de hostelería; productos de higiene tales como tampones, compresas y protege-slips; gafas y lentillas graduadas; productos para la agricultura y medicamentos para uso animal; material e instrumental sanitario; entradas a bibliotecas, museos y galerías de arte, etc.

- **IVA superreducido (4%)**. Productos de primerísima necesidad: pan y harinas para su fabricación; leche, quesos y huevos; frutas, verduras, hortalizas, legumbres, tubérculos y cereales. También: los libros, periódicos y revistas no publicitarios; medicamentos de uso humano; prótesis, sillas de ruedas y vehículos para minusválidos; viviendas de protección oficial (VPO); prestación de diversos servicios como teleasistencia, ayuda a domicilio, etc.

Ejercicio 6

Calcula el precio con IVA o precio de venta al público (PVP) de los siguientes productos:

a) Una vivienda de 245.300 € b) Un billete de tren de 13,40 € c) Una barra de pan de 0,75 €

d) Una camisa de 38,97 € e) Un libro de 18,04 € f) Un televisor de 380,07 €

Para la resolución del este ejercicio te ayudará una tabla como ésta:

Artículo	Precio sin IVA	Tipo IVA (%)	IVA (en €)	PVP o precio con IVA
vivienda	245.300 €	10%	$\frac{245.300}{100} \times 10 = 24.530$ €	245.300 € + 24.530 € = **269.830 €**

Ejemplo 2

Se han comprado artículos por valor de 720 €. Se hace un descuento del 7,5% y se debe pagar un IVA del 21%. ¿Cuál es el importe de la factura?

El problema se puede resolver de dos formas:

Primera forma

Concepto	**Operaciones**	**Importe**
Subtotal (valor de la compra)		720 €
Descuento (7,5% de 720 €)	$\frac{720 \text{ €}}{100} \times 7,5 =$	54 €
Base imponible (aplicado el Dto.)	720 € – 54 € =	666 €
IVA (21% de 666 €)	$\frac{666 \text{ €}}{100} \times 21 =$	139,86 €
TOTAL (importe a pagar)	666 € + 139,86 € =	**805,86 €**

NOTA

Si en una factura NO HAY descuento, la base imponible es igual al valor de la compra (es lo mismo que el subtotal).

Segunda forma

Con un descuento del 7,5% no se paga todo (el 100% del importe) sino el: 100 % – 7,5 % = 92,5 %

92,5% de 720 € = $\frac{720\ €}{100} \times 92{,}5$ = 666 €, importe después de aplicar el descuento.

Con un IVA del 21% se paga más del 100% del importe; se paga el: 100 % + 21 % = 121 %

121% de 666 € = $\frac{666\ €}{100} \times 121$ = **805,86 €** importe a pagar

La primera forma es obligatoria si se está elaborando una factura, ya que en ella deben figurar detallados todos los conceptos con su importe correspondiente.

La segunda forma es muy cómoda si se usa la calculadora y solamente se quiere conocer el valor final ya que la suma y resta de porcentajes puede realizarse mentalmente.

Ejercicio 7

En una compra, el valor de los productos comprados es 1.480 €. Se aplica un descuento del 10 %. El tipo de IVA a aplicar es el 21%.

a) Calcula el importe a pagar aplicando primero el descuento.
b) Calcula el importe a pagar aplicando primero el IVA
c) ¿Qué hay de igual y de diferente en ambos casos?
d) ¿Cómo crees que debe hacerse el cálculo, aplicando primero el IVA o el descuento? ¿Por qué?

Ejemplo 3

El precio de venta al público (PVP) de una camisa es de 57 €. Sabemos que este artículo está gravado con un tipo de IVA del 21%. ¿Cuál es el precio de la camisa sin IVA (PSI)?

PSI + 21% del PSI = PVP

100% del PSI + 21% del PSI = 57 €

121% del PSI = 57 €

A efectos de cálculo, un porcentaje es análogo a una fracción. Podríamos escribir:

$\frac{121}{100}$ del PSI = 57 € PSI = $\frac{57}{121} \times 100 = 47{,}107... = 47{,}11€$ o también PSI = $\frac{57 \times 100}{121}$

Ejemplo 4

Un ayuntamiento ha gastado el 61% de su presupuesto anual. Si todavía le quedan por gastar 2.345.600 €, ¿a cuánto ascendía el presupuesto del año?

Si ha gastado el 61% del presupuesto, le queda por gastar:

100% del presupuesto – 61% del presupuesto = 39% del presupuesto por gastar

39% del presupuesto = 2.345.600 €

Presupuesto = $\frac{2.345.600}{39} \times 100 = 6.014.358{,}97\ €$

Ejercicio 8

a) He pagado 48,99 € por un pantalón cuyo precio estaba rebajado un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?
b) Se ha asfaltado el 75 % de una carretera quedando todavía por asfaltar 18 km. ¿Cuál es la longitud de la carretera?

B. El porcentaje como la razón de una parte al todo al que pertenece

Para comparar magnitudes es necesario considerar el valor de cada una en relación al mismo total, que habitualmente se toma el número 100, de ahí el nombre de **porcentaje** (por cada cien).

Ejemplo

En la localidad A, de 3.675 habitantes, hay 1.102 personas menores de 18 años. En la localidad B, que cuenta con 1.745 habitantes, hay 558 personas menores de 18 años. ¿En cuál de las dos poblaciones hay, proporcionalmente, mayor número de personas menores de edad?

Se escribe la razón de **la parte al todo** en cada uno de los dos casos:

Pueblo A:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{1.102 \text{ menores de } 18 \text{ años}}{3.675 \text{ habitantes totales}} =$$ 0,2998 habitantes menores de 18 años por cada habitante

Por cada 100 habitantes habrá 100 veces más: 0,2998 × 100 = 29,98 = 30 (30%)

El 30% de los habitantes del pueblo A tiene menos de 18 años

Pueblo B:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{558 \text{ menores de } 18 \text{ años}}{1.745 \text{ habitantes totales}} =$$ 0,3197 habitantes menores de 18 años por cada habitante

Por cada 100 habitantes habrá 100 veces más: 0,3197 × 100 = 31,97 = 32 (32%)

El 32% de los habitantes del pueblo B tiene menos de 18 años

Las operaciones anteriores se pueden expresan en una sola expresión matemática, unificando las dos operaciones en una sola:

$$\frac{\text{parte}}{\text{totalidad}} \times 100 \qquad \frac{1.102}{3.675} \times 100 = 30\% \qquad \frac{558}{1.745} \times 100 = 32\%$$

Ejercicio 9

Un pueblo de 1.025 habitantes tiene un censo electoral de 850 habitantes. En las elecciones municipales, el candidato A ha obtenido 356 votos y el candidato B, 391. Ha habido 18 votos nulos y ninguno en blanco. Calcula:

a) El porcentaje de votos obtenidos por cada candidato respecto de los votos emitidos.
b) El porcentaje de votos nulos respecto de los votos totales emitidos.
c) La abstención (porcentaje de abstenciones respecto del censo electoral).
d) La participación (porcentaje de los votos emitidos respecto del censo electoral)

C. El porcentaje para expresar el aumento o disminución de un valor

Es muy importante saber sobre qué valor o cantidad se debe aplicar el porcentaje. En el enunciado debe quedar claramente expresado: ***ha aumentado*** o ***disminuido*** un *x*% ***sobre…*** o ***respecto de…***

Ejemplo

Los beneficios de una empresa en los últimos cinco años han sido los siguientes:

año 2010	año 2011	año 2012	año 2013	año 2014
3.450.780 €	3.704.560 €	3.520.000 €	3.762.200 €	3.600.450 €

Expresa en forma de porcentaje la variación de los beneficios en cada uno de los años respecto del año que le precede.

Resolución

Año	Beneficio	Variación (€)	Variación (%). El total o valor de referencia es el del año anterior
2010	3.450.780 €		
2011	3.704.560 €	3.704.560 € – 3.450.780 € = 253.780 €	$\frac{253.780}{3.450.780}\times 100 =$ 7,35 % (superávit)
2012	3.520.000 €	3.520.000 € – 3.704.560 € = – 184.560 €	$\frac{-184.560}{3.704.560}\times 100 =$ – 4,98 % (déficit)

El cociente $\frac{253.780}{3.450.780}$ = 0,0735 representa los euros ganados en 2011 por cada euro ganado en 2010.

El cociente $\frac{-184.560}{3.704.560}$ = – 0,0498 representa los euros perdidos en 2012 por cada euro ganado en 2011 (el signo negativo indica pérdida)

Ejercicio 10

Continúa el ejemplo anterior

Año	Beneficio	Variación (€)	Variación (%)
2013	3.762.200 €		
2014	3.600.450 €		

Ejercicio 11

Un concesionario de automóviles ha vendido 600 vehículos en el año 2011 y 550 vehículos en año 2012. Expresa en forma de porcentaje la variación de ventas de un año a otro.

Ejercicios “Elige la correcta” y “Practica” de la página 61 del libro.
Ejercicios “Elige la correcta” y “Practica” de la página 63 del libro.

REPARTOS PROPORCIONALES DIRECTOS

Un reparto proporcional directo es aquél que consiste en distribuir una cierta cantidad, NO en partes iguales, sino proporcionalmente entre varios números, de tal manera que al número mayor le corresponda la cantidad mayor y al número menor, la cantidad menor.

<u>Ejemplo</u>

Dos albañiles hacen una obra por la que han cobrado 1.500 euros. Uno de ellos ha trabajado durante 16 días y el otro, durante 9 días. ¿Cuánto deberá cobrar cada uno?

Resolución

En los repartos proporcionales es prioritario conocer el **criterio de reparto**. En este caso es el **número de días trabajados**.

¿Cuántos días se ha trabajado?.................................... 16 días + 9 días = 25 días

¿Cuánto dinero se ha cobrado? .... 1.500 euros

¿Cuánto dinero corresponde a cada día trabajado? ..... $\dfrac{1.500 \text{ euros}}{25 \text{ días}} = 60$ euros/día

¿Cuánto dinero corresponde al primer albañil?............ 16 días $\times$ 60 euros/día = 960 euros

¿Cuánto dinero corresponde al segundo albañil? .... 9 días $\times$ 60 euros/día = 540 euros

Comprobación: 960 euros + 540 euros = 1.500 euros

Ejercicio 12

Tres amigos rellenan una quiniela. Uno pone 3 euros, el segundo pone 4,25 euros y el tercero pone 5 euros. Obtienen un premio de 2.500 euros. ¿Cómo se repartirán el dinero?

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

Un automóvil ha consumido 48,35 litros de gasoil al realizar un trayecto de 792 km. ¿Cuántos litros de gasoil consumirá en un trayecto de 500 km?

Resolución

¿Qué magnitudes intervienen? **espacio recorrido** y **consumo** de combustible

Espacio	Consumo
792 km	48,35 litros
500 km	x

¿Existe proporcionalidad entre las magnitudes? **Sí**

¿De qué tipo? **Directa**.

A menor distancia recorrida, menor consumo de combustible.

Se pueden plantear dos razones:

- Razón del consumo al espacio recorrido: $\dfrac{48{,}35 \text{ litros}}{792 \text{ km}} = 0{,}061$ litros consumidos en 1 km
- Razón del espacio recorrido al consumo: $\dfrac{792 \text{ km}}{48{,}35 \text{ litros}} = 16{,}38$ km recorridos con 1 litro

La más interesante es la primera porque sabiendo la cantidad de gasoil necesaria para recorrer un kilómetro se puede averiguar la cantidad necesaria para recorrer 500 km.

0,061 litros/km $\times$ 500 km = 30,5 litros

Ejercicio 2

Una estufa puede funcionar a dos potencias, 750 w y 1.250 w. ¿Cuánto tiempo debería funcionar a la máxima potencia para consumir lo mismo que funcionando 12 horas a la mínima potencia? Expresa el resultado en forma compleja de horas y minutos.

Resolución

El consumo eléctrico se calcula multiplicando la potencia del aparato por el tiempo de funcionamiento: **Potencia × Tiempo = Consumo**

Para el cálculo de consumo eléctrico es necesario que la potencia esté expresada en **kilovatios** (kw) y el tiempo en **horas**. El consumo obtenido estará expresado en **kilovatios·horas** (kwh).

1 kilovatio (kw) = 1.000 vatios (w)

¿Qué magnitudes intervienen? **Potencia** eléctrica, **tiempo** de funcionamiento y **consumo**.

Potencia	Tiempo	Consumo
750 w = 0,75 Kw	12 horas	C
1.250 w = 1,25 Kw	T	C

El consumo es el mismo en los dos casos. Por eso se escribe la misma letra.

Magnitud que permanece invariable o constante de proporcionalidad: el **consumo**.

¿Existe proporcionalidad entre las magnitudes? **Sí.**

¿De qué tipo? **Inversa**; porque si se quiere mantener constante el consumo, **“a mayor potencia, menor tiempo de funcionamiento”**.

El consumo se puede averiguar con la potencia mínima y el tiempo de funcionamiento con esa potencia.

0,75 kw × 12 horas = 9 kilowatios·horas (kwh)

Si funciona a la máxima potencia:

1,25 kw × $\boldsymbol{T}$ horas = 9 kwh $\qquad\qquad \boldsymbol{T} = \dfrac{9 \text{ kwh}}{1{,}25 \text{ kw}} = 7{,}2 \text{ horas} = 7 \text{ horas y } 12 \text{ minutos}$

Ejercicio 3 (Ejercicio 33 de la página 68 del libro)

Para realizar un trabajo Pilar tarda 2 horas, Pedro 4 y Guayente 6. ¿En cuánto tiempo realizarían un trabajo similar si lo hacen juntos?

Si Pilar tarda 2 horas en hacer el trabajo, en una hora hace la mitad ($1/2$) del trabajo.

Si Pedro tarda 4 horas en hacer el trabajo, en una hora hace la cuarta parte ($1/4$) del trabajo.

Si Guayente tarda 6 horas en hacer el trabajo, en una hora hace la sexta parte ($1/6$) del trabajo.

Si trabajan juntos, en una hora realizarán:

$$\frac{1}{2} \text{ del trabajo} + \frac{1}{4} \text{ del trabajo} + \frac{1}{6} \text{ del trabajo} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12} \text{ del trabajo}$$

Si se divide el trabajo a realizar por el trabajo realizado en una hora se obtendrá las horas necesarias para la realización del trabajo:

$$\frac{12}{12} \text{ del trabajo} \div \frac{11}{12} \text{ del trabajo por hora} = \frac{12}{12} \times \frac{12}{11} = \frac{144}{132} = 1{,}09 \text{ horas}$$

1,09 horas = 1 hora + 0,09 horas

0,09 horas × 60 = 5,4 minutos = 5 minutos + 0,4 minutos **/** 0,4 minutos × 60 = 24 segundos

Tiempo de realización de la obra entre los tres juntos: 1 hora, 5 minutos y 24 segundos.

Ejercicio 4

Un colegio contrata un autobús de 55 plazas para un viaje. Se les dice que, si el autobús se completa, cada alumno pagará 25 €. Solamente se consigue completar el 80 % de las plazas.

a) Calcula la constante de proporcionalidad y explica su significado.

55 plazas × 25 € / plaza = 1.375 €, coste del viaje (constante de proporcionalidad)

b) ¿Cuánto deberá pagar cada alumno?

80 % de 55 plazas = 44 plazas ocupadas.

1.375 € **:** 44 plazas = 31,25 € que pagará cada uno de los que realizan el viaje.

Ejercicio 5 (Ejercicio 24 de la página 68 del libro)

Tres piscinas iguales se llenan con 2, 3 y 5 grifos iguales. Si la de tres grifos ha tardado 5 horas y 30 minutos en llenarse, ¿en cuántas horas se llenarán las que tienen 2 y 5 grifos?

En la piscina de 3 grifos, un grifo solo tardaría el triple de tiempo: 3 grifos × 5,5 horas = 16,5 horas

Los 2 grifos de la primera piscina tardarían la mitad de tiempo que un grifo solo: 16,5 horas ÷ 2 grifos = 8,25 horas (8 horas y cuarto)

Los 5 grifos de la tercera piscina tardarían: 16,5 horas ÷ 5 grifos = 3,3 horas (3 horas y 20 minutos)

EJERCICIOS DE REPASO Y AMPLIACIÓN

Ejercicio 1

Suponiendo que exista una relación de proporcionalidad entre las diferentes cantidades y sus importes correspondientes de cada producto, calcula:

a) Un kilogramo de patatas fritas sabiendo que una bolsa de 150 gramos cuesta 1,55 €

b) Un litro de refresco sabiendo que un bote de 330 ml cuesta 0,69 €.

c) Un kilogramo de pescado sabiendo que una bandeja de 450 gramos cuesta 3,85 €.

d) El importe de un litro de leche sabiendo que una botella de litro y medio cuesta un euro con treinta y cinco céntimos.

Ejercicio 2

La dilatación o contracción que experimenta un muelle cuando se le aplica una fuerza es proporcional al valor de esa fuerza.

En el laboratorio se procede a la prueba de un muelle de 7 cm colocando sobre él diferentes pesos y midiendo la longitud del muelle. Se obtienen los siguientes resultados:

Masa sobre el muelle	Contracción del muelle	Longitud del muelle
1 kg	0,4 cm	6,6 cm
2,5 kg	1 cm	6 cm
3 kg	1,2 cm	5,8 cm

a) A la vista de los resultados, la relación de proporcionalidad entre la masa que se coloca sobre el muelle y la contracción del mismo, ¿es directa o inversa?

b) Calcula el valor de la razón de la masa encima del muelle a la contracción del mismo y explica su significado

c) Calcula el valor de la razón de la contracción del muelle a la masa colocada sobre él y explica su significado.

d) Calcula la contracción del muelle y su longitud cuando se coloca sobre él una masa de 7,5 kg.

e) Calcula la masa que habrá que colocar sobre el muelle para que se contraiga 1,3 cm.

Ejercicio 3

En la campaña agrícola 2009 / 2010 se produjeron en Aragón 9.625 toneladas de aceite de oliva que suponen el 0,77% de la producción en España. Averigua la producción española de aceite de oliva.

Ejercicio 4

Una empresa compra en una fábrica 15 ordenadores portátiles a 336 € cada uno, 3 impresoras a 74,95 € cada una y diverso material por un importe de 450,85 €. Se le hace un descuento del 7,5%.

Elabora la factura de esta compra aplicando el tipo de IVA que le corresponda (21%). Se llama base imponible a la cantidad de la factura sobre la que se calcula el impuesto a pagar, en este caso el IVA.

Cantidad	Concepto	Precio	Importe
		Subtotal (valor total de los productos)	
		Descuento ___ **%** del subtotal	
		Base imponible (cantidad sobre la que se aplica el impuesto, el IVA)	
		IVA ___ **%** de la BI	
		TOTAL	

Ejercicio 5

Al finalizar el año 2014, un litro de gasolina de 98 octanos costaba 1,359 €. En enero de 2015 su precio era de 1,305 €. Expresa en forma de porcentaje la variación experimentada por el precio de la gasolina en el año 2015 respecto del 2014.

Ejercicio 6

Durante el último año, un fabricante de automóviles ha fabricado 350.785 turismos, 125.425 furgonetas y 7.650 camiones. Expresa en forma de porcentaje la cantidad de vehículos fabricados de cada tipo.

Ejercicio 7

Dos estufas de 1.250 w y 1.750 w respectivamente funcionan cada día el mismo número de horas. Averigua el consumo durante el mes de noviembre de la que tiene menos potencia sabiendo que la otra ha consumido 525 Kwh.

Ejercicio 8

Un trabajador realiza el trayecto de casa al trabajo con un ciclomotor en 45 minutos circulando a una velocidad media de 42 km/h. Se compra una motocicleta y, a partir de entonces, consigue realizar el trayecto en 24 minutos. Calcula la velocidad media a la que realiza en trayecto con la motocicleta.

Ejercicio 9

Una persona toma para desayunar una naranja de aproximadamente 200 g de peso, un tazón de 400 ml de leche, 10 g de azúcar y 10 galletas. Calcula el importe del desayuno sabiendo que los precios son:

- Naranjas: 0,85 € / kg
- Leche: 0,95 € / litro
- Azúcar, 1,75 € / kg
- Galletas: 1 paquete de 60 galletas cuesta 1,80 €

Ejercicio 10

La cantidad de alcohol de las bebidas alcohólicas viene indicado en los envases en forma de porcentaje. Si en el envase de una bebida está escrito “Vol 5,5%”, quiere decir que en cada 100 partes de bebida hay 5,5 partes de alcohol.

Calcula la cantidad de alcohol ingerida en cada uno de los siguientes casos

Bebida	**% alcohol**	**Capacidad del envase**	**Alcohol consumido (ml)**
Cerveza	5,5 %	Lata (33 cl)	
Cava	11,8 %	Una copa (0,12 litros)	
Vino de mesa	12 %	Un vaso pequeño (125 ml)	
Coñac	40 %	Una copa (5 cl)	

Ejercicio 11

Calcula la cantidad de vino con un volumen de alcohol del 11,75% con la que se ingiere la misma cantidad de alcohol que con una lata de cerveza de 33 cl con un volumen de alcohol del 6,7%

Ejercicio 12

Un mapa de España está elaborado a escala **1 : 1.200.000**. Calcula:

a) La distancia real en línea recta entre dos ciudades separadas en el mapa por 12,7 cm.

b) La separación en el mapa de dos ciudades separadas en la realidad por 540 km.

Ejercicio 13

Se nos da un plano en el que no se ha indicado la escala. El plano corresponde a la fachada del edificio y sabemos que la puerta tiene una altura de 3,5 m. En el plano, mide 2,8 cm

a) Calcula la escala del plano.

b) Calcula la altura real del edificio si en el plano es de 17,6 cm.

Ejercicio 14

Los ingredientes de una tortilla de patata para 4 personas son los siguientes: 600 gramos de patata, 250 gramos de cebolla, 120 gramos de aceite y 6 huevos grandes (70 gramos cada uno). Averigua la cantidad de cada ingrediente si se quiere hacer la tortilla para 6 personas, indicando el número de huevos.

Ejercicio 15

Un grifo llena un depósito de 46.000 litros en 15 horas y 20 minutos. ¿En cuánto tiempo llenará un depósito de 18.500 litros un grifo igual al anterior? Expresa el resultado en forma compleja (…horas y …minutos)

Ejercicio 16

Tres socios fundan un negocio. El socio A puso 12.640 euros; el socio B, 15.800 euros y el socio C, 19.560 euros. Al cabo de un tiempo obtienen un beneficio de 36.000 euros. ¿Cómo se repartirán el dinero?

Ejercicio 17

Tres socios se quieren repartir los 91.575 euros que han obtenido de beneficio en un negocio. Los tres socios han aportado la misma cantidad de dinero, pero difieren en el tiempo de permanencia en el mismo. El primero ha estado en el negocio un año y dos meses; el segundo, un año y tres meses; el tercero, dos años y siete meses. Calcular el dinero que le corresponde a cada uno.

Ejercicio 18

Está previsto realizar un trabajo en 60 días trabajando 8 horas diarias. Como no se puede comenzar en la fecha prevista, deberá realizarse en 50 días. Cuánto se deberá trabajar diariamente? (…h y …minutos)

Ejercicio 19

La construcción de un puente cuesta $2_1$150.420 euros. El estado paga el 25% del coste total. El gobierno regional paga el 15% del coste total. El resto lo pagan los ayuntamientos de los pueblos beneficiados proporcionalmente al número de habitantes. El pueblo A tiene 860 habitantes; el pueblo B, 615; el pueblo C, 525. ¿Cuánto dinero pagará cada ayuntamiento?

Ejercicio 20

Una persona ha establecido en su testamento que se reparta el dinero que tiene en el banco entre sus 4 hijos, proporcionalmente al número de nietos que le ha dado cada uno de ellos. Para el hijo que no ha tenido descendencia dispone que se considere, a efectos de cálculo, que tiene medio hijo.

En el banco hay 845.320 € y la descendencia de sus hijos es 1, 2 y 5 hijos respectivamente. Averigua cuánto dinero se llevara cada uno de sus cuatro hijos.

Ejercicio 21

En un puesto del mercado hay un cartel con información sobre cantidades e importes de naranjas.

NARANJAS	
1 kg	0,65 €
2 kg	1,30 €
5 kg	3,00 €
10 kg	5,75 €
15 kg	8,25 €

a) Escribe una razón entre valores correspondientes de estas dos magnitudes, calcula su valor y explica su significado.

b) Escribe la razón inversa a la anterior, calcula su valor y explica su significado.

c) En la tabla de cantidades e importes, ¿existe una relación de proporcionalidad? Razona tu respuesta.

Ejercicio 22

Una cooperativa que comercializa aceite de oliva dispone de un depósito en el que almacena el aceite virgen extra. Este aceite puede ser envasado de distintas formas: si se hace en botellas de medio litro se necesitan 120.000 unidades; si se hace en botellas de tres cuartos de litro, 80.000 unidades; y si es en bidones de 5 litros, 12.000 unidades.

a) Calcula la constante de esta relación de proporcionalidad y explica su significado.

b) Si se envasara en botellas de litro y medio, ¿cuántas se necesitarán para envasar todo el aceite del depósito?

Ejercicio 23

Una persona que ha jugado 20 euros a un determinado número de la lotería ha obtenido un premio de 5.000 euros.

a) Escribe las dos razones que pueden escribirse con los valores dados de las magnitudes “Dinero jugado” y “Dinero ganado”, calcula el valor de cada una y explica su significado.

b) ¿Cuánto dinero habría ganado si hubiese jugado 45 euros?

c) ¿Cuánto dinero debería haber jugado para ganar 9.000 euros?

Ejercicios del libro

Ejercicio "Relaciona" de la página 65.

Páginas 67 y 68. Ejercicios 12, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 25, 27, 28, 29, 30 y 32

SOLUCIONES

Ejercicio 1

a) $\frac{1.200\,\text{litros}}{5\,\text{horas}} = 240$ litros / hora (litros que salen en una hora; esta razón define el concepto **caudal**).

b) $\frac{5\,\text{horas}}{1.200\,\text{litros}} = 0{,}00416$ horas / litro (tiempo necesario para que salga un litro de agua por el grifo)

0.00416 horas × 60 × 60 = 14,97 segundos (14 segundos y 97 centésimas de segundo).
Redondeando, el resultado quedaría 15 segundos / litro.

Ejercicio "Relaciona" de la página 45

Figura 1 = $^1\!/_4$ Figura 2 = $^2\!/_3$ Figura 3 = $^3\!/_3$ Figura 4 = $^4\!/_7$

Ejercicio "Elige la correcta" de la página 45

La razón del número de habitantes al número de empleados municipales es $^{1.750}\!/_{12}$

Primer ejercicio "Elige las correctas" de la página 46

$^{20}\!/_{60} = {}^2\!/_6 = {}^1\!/_3$

Segundo ejercicio "Elige las correctas" de la página 46

$^6\!/_{15} = {}^4\!/_{10} = {}^2\!/_5 = {}^1\!/_{2{,}5}$

Ejercicio "Practica" de la página 48

a) $x = 12$ b) $x = 9$ c) $x = 48$ d) $x = 16$ e) $x = 32$ f) $x = 15$

Ejercicio "Relaciona" de la página 49

$4 \rightarrow {}^{20}\!/_5 = {}^x\!/_1$ $7{,}5 \rightarrow {}^x\!/_5 = {}^{15}\!/_{10}$ $7 \rightarrow {}^{27}\!/_{21} = {}^9\!/_x$ $12{,}5 \rightarrow {}^{2{,}5}\!/_x = {}^2\!/_{10}$

Ejercicio "Verdadero o falso" de la página 49

El 12 es un medio (V)
El 5 es un extremo (F)

0,8 es la constante de proporcionalidad (F). La constante es $0{,}8\hat{3}$.

$^{15}\!/_{18}$ también forma razón con ellos (V)

$^{1{,}25}\!/_{1{,}5}$ también forma razón con ellos (V)

Ejercicio "Elige las correctas" de la página 49

$^5\!/_{12} = {}^{10}\!/_{24} = {}^{50}\!/_{120}$

Ejercicio 2

a) $\frac{75\,\text{km}}{3\,\text{horas}} = 25$ $\frac{87{,}5\,\text{km}}{3{,}5\,\text{horas}} = 25$ $\frac{100\,\text{km}}{4\,\text{horas}} = 25$ $\frac{106{,}25\,\text{km}}{4{,}25\,\text{horas}} = 25$ K = 25 km / hora

K (constante de proporcionalidad) = 25 km / hora. Kilómetros recorridos en una hora

b) $\frac{3\,\text{horas}}{75\,\text{km}} = 0{,}04$ $\frac{3{,}5\,\text{horas}}{87{,}5\,\text{km}} = 0{,}04$ $\frac{4\,\text{horas}}{100\,\text{km}} = 0{,}04$ $\frac{4{,}25\,\text{horas}}{106{,}25\,\text{km}} = 0{,}04$ K = 0,04 horas / km

K (constante de proporcionalidad) = 0,04 horas / km. Tiempo empleado para recorrer un kilómetro (0,04 horas = 2 minutos y 24 segundos)

Ejercicio "Verdadero o falso" de la página 52

Número de carpinteros y cantidad de puertas que hacen (V)

Peso de una persona y su edad (F)

Personas a las que les gusta el color rojo y que ganen al ajedrez (F)

Número de horas andando a velocidad constante y número de kilómetros recorridos (V)

Ejercicio "Relaciona" de la página 52

El ejercicio se resuelve dividiendo los kilómetros recorridos entre la velocidad o, también, multiplicando el tiempo empleado por la velocidad.

Ha recorrido 400 km	→	En 5 horas
Ha recorrido 160 km	→	En 2 horas
Ha recorrido 60 km	→	En 45 horas
Ha recorrido 200 km	→	En 2,5 horas

Ejercicio "Elige la correcta" de la página 52

3.404 m – 2.144 m = 1.260 m que han subido

La velocidad de ascenso o constante de proporcionalidad es $\frac{360\,\text{m}}{2\,\text{horas}} = 180$ metros / hora

Les costará $\frac{1260\,\text{m}}{180\,\text{m}/\text{h}} = 7\,\text{horas}$

Ejercicio 3

a) k = 750 litros (capacidad del depósito) b) $\frac{750\,\text{litros}}{15\,\text{litros}/\text{min.}} = 50$ min. c) $\frac{750\,\text{litros}}{40\,\text{minutos}} = 18{,}75$ litros/min.

Ejercicio "Verdadero o falso" de la página 54

Para una misma distancia, la velocidad que lleva y la distancia recorrida (V) → inversamente proporcional

La presión atmosférica y la altura a la que nos encontramos (V) → inversamente proporcional

Número de obreros y la cantidad de muro que hacen (F) → directamente proporcional

Número de personas invitadas a una fiesta y la cantidad de tarta que les tocará (V) → inversamente proporcional

Ejercicio "Relaciona" de la página 54

La proporcionalidad es inversa, por lo que la constante de proporcionalidad se calcula multiplicando los valores de las dos magnitudes (número de obreros y días de trabajo)

10 obreros × 12 días = 120 obreros·días (es la expresión del trabajo a realizar)

El producto de los valores correspondientes de las dos magnitudes debe ser SIEMPRE **120**

Para acabarlo en 7 días y medio	→	Harán falta 16 obreros
Para acabarlo en 10 días	→	Harán falta 12 obreros
Para acabarlo en 4 días	→	Harán falta 30 obreros
Para acabarlo en 24 días	→	Harán falta 5 obreros
Para acabarlo en 6 días	→	Harán falta 20 obreros

Ejercicio “Elige la correcta” de la página 54

Para realizar las operaciones, los datos deben estar en la misma unidad.

2 horas y 20 minutos = 2,33 horas

La velocidad y el tiempo empleado en recorrer un determinado trayecto son magnitudes inversamente proporcionales, por lo que la constante de proporcionalidad se obtiene multiplicando los valores relacionados de ambas magnitudes.

100 km / h × 2,33 horas = 233 km recorridos.

Para calcular el tiempo empleado cuando circula a 80 km / h:

80 km / × Tiempo = 233 km → $\frac{233\,\text{km}}{80\,\text{km}/\text{h}} = 2{,}9125\,\text{horas}$ (3 horas)

Primer ejercicio “Elige la correcta” de la página 58

El número de vacas y el tiempo que se pueden alimentar con una determinada cantidad de pienso son magnitudes inversamente proporcionales, por lo que la constante de proporcionalidad es el producto de los valores relacionados de ambas magnitudes.

21 vacas × 30 días = 630 vacas·días.

Para calcular el tiempo durante el que se dispondrá de pienso para 14 vacas (7 menos)

14 vacas × Tiempo = 630 vacas·días → $\frac{630\,\text{vacas}\cdot\text{días}}{14\,\text{vacas}} = 45\,\text{días}$

Segundo ejercicio “Elige la correcta” de la página 58

La altura del agua en la piscina y el tiempo que permanece abierto el grifo son magnitudes directamente proporcionales, por lo que la constante de proporcionalidad es el cociente de los valores relacionados de ambas magnitudes.

La velocidad de ascenso del nivel de agua o constante de proporcionalidad es $\frac{15\,\text{cm}}{50\,\text{minutos}} = 0{,}3\,\text{cm}/\text{min}$.

Para calcular la altura del nivel de agua al cabo de 2 horas: 0,3 cm / min. × 120 minutos = 36 cm

Ejercicio 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	**D**	**I**	**D**	**I**	**D**	**I**	**D**	**D**	**I**	**D**	**I**	**D**	**I**	**D**	**D**

Ejercicio 5

a) $\frac{2.125\text{ cm}}{8{,}5\text{ cm}}$ = 250; escala = 1 : 250 b) 6 mm × 250 = 1.500 mm = 1,5 m c) $\frac{350\,\text{cm}}{250}$ = 1,4 cm

Ejercicio 6

	Importe sin IVA	Tipo de IVA	IVA	PVP
a) Vivienda	245.300 €	10,00%	24.530,00 €	269.830,00 €
b) Billete de tren	13,40 €	10,00%	1,34 €	14,74 €
c) Barra de pan	0,75 €	4,00%	0,03 €	0,78 €
d) Camisa	38,97 €	21,00%	8,18 €	47,15 €
e) Libro	18,04 €	4,00%	0,72 €	18,76 €
f) Televisor	380,07 €	21,00%	79,81 €	459,88 €

Ejercicio 7

a) Descuento = $\frac{1.480}{100} \times 10$ = 148 €; 1.480 € – 148 € = 1.332 €

IVA = $\frac{1.332}{100} \times 21$ = 279,72 €; 1.332 € + 279,72 € = 1.611,72 €

b) IVA = $\frac{1.480}{100}\times 21$ = 310,80 €; 1.480 € + 310,80 € = 1.790,80 €

Descuento = $\frac{1.790{,}80}{100}\times 10$ = 179,08 €; 1.790,80 € – 179,08 = 1.611,72 €

c) El importe final es el mismo; sin embargo, el IVA es mayor si se calcula primero.

d) Debe calcularse primero el descuento y luego el IVA porque en caso contrario, el vendedor paga más IVA del que le corresponde.

Ejercicio 8

Con un descuento del 30%, se paga el 70%

70% del precio = 48,99 €

$$\frac{48{,}99}{70}\times 100 = 69{,}99\,€$$

Si se ha asfaltado el 75%, queda por asfaltar el 25%

25% de la carretera = 18 km

$$\frac{18}{25}\times 100 = 72\ \text{km}$$

Ejercicio 9

a) Total de votos emitidos = 356 + 391 + 18 = 765 votos;

Candidato A = $\frac{356}{765}\times 100$ = 46,53 %; candidato B = $\frac{391}{765}\times 100$ = 51,11 %

b) Nulos = $\frac{18}{765}\times 100$ = 2,35 %

c) Abstención = 850 votos posibles – 765 votos emitidos = 85 votos no emitidos

Abstención = $\frac{85}{850}\times 100$ = 10% del censo electoral

d) Participación = $\frac{765}{850}\times 100$ = 90% del censo electoral

Ejercicio 10

Año	Beneficio	Variación (€)	Variación (%)
2013	3.762.200 €	3.762.200 € – 3.520.000 € = 242.200 €	$\frac{242.200}{3.520.000}\times 100$ = 6,88 % (superávit)
2014	3.600.450 €	3.600.450 € – 3.762.200 € = – 161.750 €	$\frac{-161.750}{3.762.200}\times 100$ = – 4,3 % (déficit)

Ejercicio 11

550 vehículos – 600 vehículos = – 50 vehículos; se han vendido 50 vehículos menos

$\frac{-50}{600}\times 100$ = – 8,33 %; en 2012 se ha vendido un 8,33 % de vehículos menos que en el año 2011

Primer ejercicio "Elige la correcta" de la página 61

$\frac{77}{100}\times 100 = 77\%$ del peso de la lata corresponde a las sardinas

Segundo ejercicio "Elige la correcta" de la página 61

$\frac{3\ \text{familias}}{24\ \text{apartamentos}}\times 100 = 12{,}5\%$ de los apartamentos están ocupados todo el año

Ejercicio "Practica" de la página 61

Las soluciones están en el libro

Primer ejercicio "Elige la correcta" de la página 63

Precio sin IVA (PSI) + 6 % del precio sin IVA (PSI) = 30 € 100% del PSI + 6 % del PSI = 30 €

106 % del PSI = 30 €   PSI = $\frac{30}{106} \times 100 = 28{,}3018... = 28{,}30\,€$

Segundo ejercicio "Elige la correcta" de la página 63

100% – 20% = 80% del precio (320 €) que se va a pagar $\frac{320}{100} \times 80 = 256\,€$

Ejercicio "Practica" de la página 63
Las soluciones están en el libro

Ejercicio 12
Dinero puesto = 3 € + 4,25 € + 5 € = 12,25 €;
2.500 € ganados **:** 12,25 € puestos = 204,08 € ganados / € puesto
3 € × 204,08 € = 612,24 €
4,25 € × 204,08 € = 867,34 €
5 € × 204,08 € = 1.020,40 €
Comprobación = 612,24 € + 867,34 € + 1.020,40 € = 2499,98 € (No da 2.500 porque la división 2.500 € **:** 12,25 € NO es exacta.

Soluciones de los ejercicios repaso y ampliación

Ejercicio 1

a) $\frac{1{,}55\,€}{150\,g}$ × 1.000 g = 10,30 € / kg $\frac{0{,}69\,€}{330\,ml}$ × 1.000 ml = 2,09 € / litro

b) $\frac{3{,}85\,€}{450\,g}$ × 1.000 g = 8,55 € / kg $\frac{1{,}35\,€}{1{,}5\text{ litros}}$ = 0,90 € / litro

Ejercicio 2

a) Directa. Cuando la masa sobre el muelle aumenta, aumenta también la contracción del mismo

b) $\frac{1\text{ kg}}{0{,}4\text{ cm}} = \frac{2{,}5\text{ kg}}{1\text{ cm}} = \frac{3\text{ kg}}{1{,}2\text{ cm}} = 2{,}5\text{ kg/cm}$ Se necesitan 2,5 kg para contraer el muelle 1 cm

c) $\frac{0{,}4\text{ cm}}{1\text{ kg}} = \frac{1\text{ cm}}{2{,}5\text{ kg}} = \frac{1{,}2\text{ cm}}{3\text{ kg}} = 0{,}4\text{ cm/kg}$ Se produce una contracción de 0,4 cm por cada kg

d) 0,4 cm/kg × 7,5 kg = 3 cm. El muelle medirá 4 cm (7 – 3)

e) 2,5 kg/cm × 1,3 cm = 3,25 kg (3 kg y 250 g)

Ejercicio 3

0,77% de la producción española = 9.625 T $\frac{9.625}{0{,}77} \times 100$ = 1.250.000 T producidas en España

Ejercicio 4

Cantidad	Concepto	Precio	Importe
15	Ordenadores portátiles	336,00 €	5.040,00 €
3	impresoras	74,95 €	224,85 €
	material diverso		450,85 €
		Subtotal	**5.715,70 €**
	Descuento **7,5** % de 5.715,70 €		428,68 €
	Base imponible (B.I.) = Subtotal - Descuento		**5.287,02 €**
	I.V.A. **21** % de 5.287,02 €		1.110,27 €
	TOTAL A PAGAR (Base imponible + IVA)		**6.397,30 €**

Ejercicio 5

Diferencia de precio = 1,305 – 1,359 = – 0,054 €; $\frac{-0{,}054}{1{,}359} \times 100 = -3{,}97\ \%$

Ejercicio 6

350.785 turismos + 125.425 furgonetas + 7.650 camiones = 483.860 vehículos fabricados

Turismos = $\frac{350.785}{483860} \times 100 = 72{,}4972$; el 72,5 % de los vehículos fabricados han sido turismos.

Furgonetas = $\frac{12.425}{483860} \times 100 = 25{,}9218$; el 25,92 % de los vehículos fabricados han sido furgonetas.

Camiones = $\frac{7.650}{483860} \times 100 = 1{,}581$; el 1,58 % de los vehículos fabricados han sido camiones.

Comprobación = 72,5 % + 25,92 % + 1,58 % = 100%

Ejercicio 7

$\frac{525 \text{ kwh}}{1{,}75 \text{ kw}} = 300 \text{ horas}$

1,25 kw × 300 horas = 375 kwh

Ejercicio 8

0,75 h × 42 km/h = 31,5 km

31,5 km **:** 0,4 h = 78,75 km/h

Ejercicio 9

Alimento	**Ración**	**Precio**	**Operaciones**	**Importe**
Naranjas	200 g	0,00085 € / g	0,00085 € / g × 200 g	0,17 €
Leche	400 ml	0,00095 € / ml	0,00095 € / ml × 400 ml	0,38 €
Azúcar	10 g	0,00175 € / g	0,00175 € / g × 10 g	0,0175 €
Galletas	10 galletas	$\frac{1{,}80\text{ €}}{60\text{ galletas}}$ = 0,03 € / galleta	0,03 € / galleta × 10 galletas	0,30 €
			Importe del desayuno	0,8675 € = **0,87 €**

Ejercicio 10

Bebida	**% alcohol**	**Consumición**	**Alcohol consumido (mililitros)**
Cerveza	5,5 %	Lata (33 cl)	5,5% de 330 ml = $\frac{330\text{ ml}}{100} \times 5{,}5 = 18{,}15$
Cava	11,8 %	Una copa (0,12 litros)	11,8% de 120 ml = $\frac{120\text{ ml}}{100} \times 11{,}8 = 14{,}16$
Vino	12 %	Un vaso (1,25 dl)	12% de 125 ml = $\frac{125\text{ ml}}{100} \times 12 = 15$
Coñac	40 %	Una copa (5 cl)	40% de 50 ml = $\frac{50\text{ ml}}{100} \times 40 = 20$

Ejercicio N

Calcula la cantidad de vino con un volumen de alcohol del 11,75% que contiene la misma cantidad de alcohol que una lata de cerveza de 33 cl con un volumen de alcohol del 6,7%

Alcohol de la lata = 6,7% de 330 ml = $\frac{330\text{ ml}}{100} \times 6{,}7 = 22{,}11$ ml

11,75% de x ml = 22,11 ml $\frac{22{,}11\text{ ml}}{11{,}75} \times 100 = 188$ ml

Ejercicio 11

a) 12,7 cm × 1.200.000 = 15.240.000 cm = 152,4 km

b) $\frac{54.000.000\text{cm}}{1.200.000}$ = 45 cm.

Ejercicio 12

a) $\frac{350\text{ cm}}{2,8}$ = 125; escala = 1 **:** 125

b) 17,6 cm × 125 = 2.200 cm = 22 metros

Ejercicio 13

Ingredientes	**Para 4 personas**	**Para 1 persona**	**Para 6 personas**
Patata	600 g	$600/4 = 150$ g	150 × 6 = 900 g
Cebolla	250 g	$250/4 = 62,5$ g	62,5 × 6 = 375 g
Aceite	120 g	$120/4 = 30$ g	30 × 6 = 180 g
Huevos	420 g	$420/4 = 105$ g	105 × 6 = 630 g (9 huevos)

Ejercicio 14

Razón de la “cantidad” al “tiempo” = $\frac{46.000\text{ litros}}{920\text{ minutos}}$ = 50 litros / minuto (caudal del grifo)

$x = \frac{18.500\text{ litros}}{50\text{ litros / minuto}}$ = 370 minutos = 6 horas y 10 minutos

Ejercicio 15

Dinero invertido en el negocio = 12.640 € + 15.800 € + 19.560 € = 48.000 €

36.000 € ganados **:** 48.000 € invertidos = 0,75 euros ganados por cada euro invertido

Socio A = 0,75 € × 12.640 € = 9.480 euros

Socio B = 0,75 € × 15.800 € = 11.850 euros

Socio C = 0,75 € × 19.560 € = 14.670 euros

Ejercicio 16

Tiempo en el negocio = 60 meses

91.575 € **:** 60 meses = 1.526,25 € / mes

Socio 1º = 1.526,25 € / mes × 14 meses = 21.367,50 €

Socio 2º = 1.526,25 € / mes × 15 meses = 22.893,75 €

Socio 3º = 1.526,25 € / mes × 31 meses = 47.313,75 €

Ejercicio 17

60 días × 8 h / día = 480 horas de trabajo

480 h **:** 50 días = 9,6 h /día = 9 h. y 36 min. cada día

Ejercicio 18

Los ayuntamientos pagan el 60 % del coste. 60 % de 2.150.420 € = 1.290.252 €

Habitantes totales = 860 + 615 + 525 = 2.000;

1.290.252 € **:** 2.000 habitantes = 645,13 € / habitante

Pueblo A = 645,13 € / habitante × 860 habitantes = 554.808,36 euros

Pueblo B = 645,13 € / habitante × 615 habitantes = 396.752,49 euros

Pueblo C = 645,13 € / habitante × 525 habitantes = 338.691,15 euros

Ejercicio 19

Número de hijos = 8,5;

845.320 € **:** 8,5 hijos = 99.449,41 € / hijo

Sin descendencia = 99.449,41 € / hijo × 0,5 hijos = 49.724,71 €

Con 1 hijo = = 99.449,41 € / hijo × 1 hijo = 99.449,41 €

Con 2 hijos = = 99.449,41 € / hijo × 2 hijos = 198.898,82 €

Con 5 hijos = = 99.449,41 € / hijo × 5 hijos = 497.247,05 €

Ejercicio 20

a) $\frac{0{,}65\,€}{1\text{ kg}} = 0{,}65\,€/\text{kg}$ $\frac{1{,}30\,€}{2\text{ kg}} = 0{,}65\,€/\text{kg}$ $\frac{3\,€}{5\text{ kg}} = 0{,}60\,€/\text{kg}$ $\frac{5{,}75\,€}{10\text{ kg}} = 0{,}58\,€/\text{kg}$ $\frac{8{,}25\,€}{15\text{ kg}} = 0{,}55\,€/\text{kg}$

Significado: euros cada kilógramo (precio)

b) $\frac{1\text{ kg}}{0{,}65\,€} = 1{,}54\text{ kg}/€$ $\frac{2\text{ kg}}{1{,}30\,€} = 1{,}54\text{ kg}/€$ $\frac{5\text{ kg}}{3\,€} = 1{,}67\text{ kg}/€$ $\frac{10\text{ kg}}{5{,}75\,€} = 1{,}74\text{ kg}/€$ $\frac{15\text{ kg}}{8{,}25\,€} = 1{,}82\text{ kg}/€$

Significado: kilógramos que se pueden comprar con 1 euro.

c) No existe relación de proporcionalidad en toda la tabla ya que la constante de proporcionalidad no es la misma.

Ejercicio 21

a) Calcula la constante de esta relación de proporcionalidad y explica su significado.

Capacidad del envase	Número de envases	Constante de proporcionalidad
0,5 litros	120.000	0,5 × 120.000 = 60.000 litros (capacidad del depósito)
0,75 litros	80.000	0,75 × 80.000 = 60.000 litros (capacidad del depósito)
5 litros	12.000	5 × 12.000 = 60.000 litros (capacidad del depósito)

c) 60.000 litros **:** 1,5 litros / botella = 40.000 botellas

Ejercicio 22

a) $\frac{5.000\,€}{20\,€}$ = 250 € ganados por cada euro jugado $\frac{20\,€}{5.000\,€}$ = 0,004 € jugados por cada euro ganado

b) 250 € × 45 € = 11.250 euros   c) 0,004 € × 9.000 € = 36 €

Ejercicio "Relaciona" de la página 65 del libro

Al primero, 3.600 €; al segundo, 1.575 €; al tercero, 2.925 €

Ejercicios de las páginas 67 y 68 del libro

Ejercicio 12

126 minutos = 2 horas y 6 minutos

Ejercicio 15

Ha tenido un recargo del 10%

Ejercicio 17

En la primera oferta deberá pagar 432,90 € y en la segunda, 413,28 €

Ejercicio 18

El 85% de las personas no tienen coche

Ejercicio 19

Habrá que comprar 4,86 kilogramos de manzanas

Se obtendrán 80,5 raciones de tarta

Ejercicio 20

Pedro = 3.000 €; Juan = 4.500 €; María = 7.500 €

Ejercicio 22

125 €

Ejercicio 25

La piscina tendrá una longitud de 16,5 metros

Ejercicio 27

Ixeia cobrará 112,94 € y Alba, 127,06 €

Ejercicio 28

Por 100 dólares nos darán 72,51 €

Ejercicio 29

Tendrá que vender por valor de 10.000 €

Ejercicio 30

Tendrán alimento para 22,5 días de primavera

Ejercicio 32

a) 19.116 € b) Se obtiene el mismo resultado