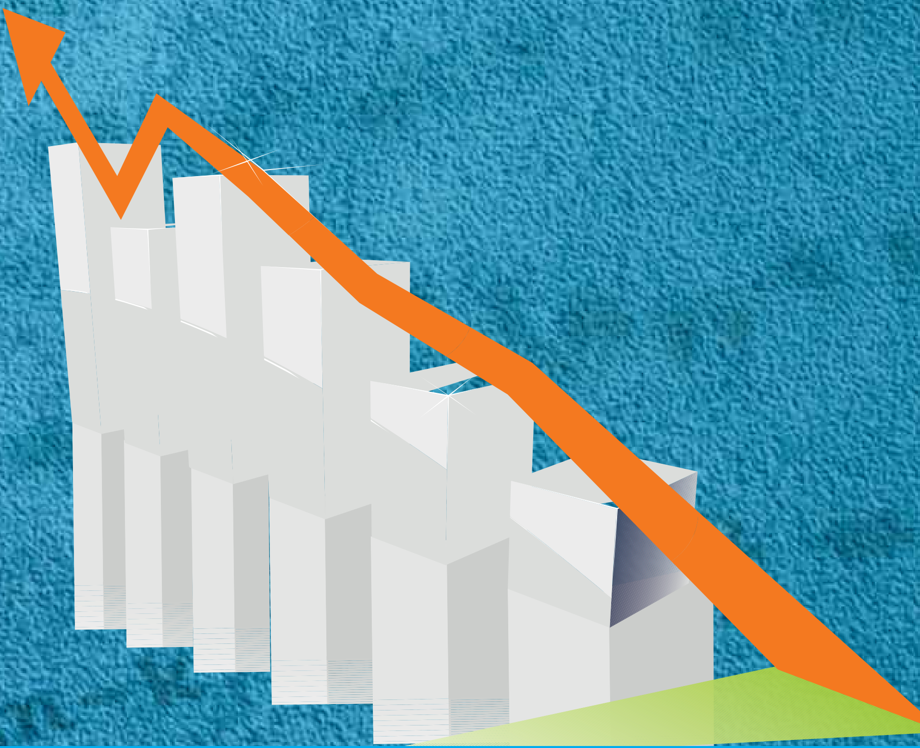
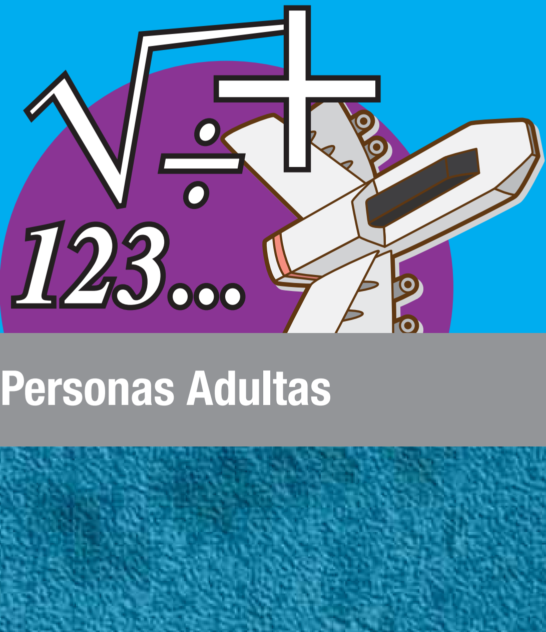


MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA



módulo 2

Educación Secundaria para Personas Adultas

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

Matemáticas y Tecnología

2

módulo

Educación Secundaria para Personas Adultas

Este material pertenece a la actuación *"Innovación educativa: materiales didácticos para el desarrollo de cursos on-line dirigidos a la población adulta"*, del Programa Operativo del Fondo Social Europeo del Gobierno de Aragón 2007-13

Primera edición mayo 2011

Autores:
– Dª Mª José García Cebrian, DNI 17685225-L, coordinadora y responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 5.
– Dª José María Aína Martínez, DNI 17697713-H, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 4.
– Dª Elisa García Ribeiro, DNI 02090161-J, responsable de la elaboración de los contenidos de las unidades 1 y 6.
– Dª Juan María Gascón Vallés, DNI 25135096-Y, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 3.
– Dª Soledad Sanz López, DNI 17727299-A, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 2.

Diseño de maquetación:
María José García Cebrian

Diseño de cubierta:
INO reproducciones

Edita:
Gobierno de Aragón. Dirección General de Formación Profesional y Educación Permanente. Servicio de Educación Permanente y Formación del Profesorado.

Impreso en España.
Por: INO reproducciones

Esta publicación electrónica, corresponde al Ámbito Matemático-tecnológico para la obtención del título de Graduado Escolar en Educación Secundaria Obligatoria para las personas adultas.

ÍNDICE

Matemáticas y Tecnología 2º

Números enteros

1

Existen situaciones de la vida cotidiana que no es posible describir únicamente mediante los números naturales. Una de las aplicaciones de los números es la medida de magnitudes. Habrás observado que, en los botones de los ascensores, la planta baja se indica con un cero y los pisos inferiores con los números. -1, -2, -3,... Estos últimos son los números negativos.

También se necesitan para fechar acontecimientos históricos, usamos como referencia o punto cero el nacimiento de Cristo. Así, el año 35 antes de Cristo se representa por un número negativo (-35 ó 35 a C.); y el año 616 después de Cristo con un número positivo (+616 o simplemente 616).

Si decimos que la temperatura de un cuerpo es de 10 grados, la información resulta incompleta. Debemos añadir si esa medida es "sobre cero" o "bajo cero".

Los números negativos aparecen cuando, al fijar un origen en una escala, necesitamos situar valores a uno y otro lado del origen. Los números enteros comprenden los números positivos, los números negativos y el cero.

En esta unidad aprenderás a trabajar con números negativos y positivos, al final de la misma deberás ser capaz de:

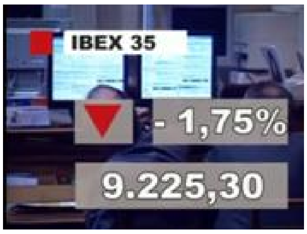
- *Reconocer los números enteros.*
- *Comprender la necesidad de los números negativos.*
- *Representar los números enteros en la recta numérica.*
- *Hallar el valor absoluto de un número entero.*
- *Comparar y ordenar números enteros.*
- *Operar con números enteros, utilizar la regla de los signos y conocer las propiedades de las operaciones.*
- *Realizar operaciones combinadas, teniendo en cuenta la jerarquía de operaciones y el uso de los paréntesis.*
- *Resolver problemas de aplicación a la vida cotidiana.*

1. Introducción

¿Qué es un número entero?

Para contar objetos tenemos los **números naturales**, pero hay magnitudes que no pueden representarse por dichos números. Dichas magnitudes aparecen en situaciones de la vida diaria y para ellas se usa otro tipo de números, los **números enteros** o los números decimales o los números fraccionarios. Nos concentraremos en los números enteros en esta unidad.

Algunas de ellas son: medida de altitudes, plantas en los edificios, gastos e ingresos, aumentos y disminuciones... Con un poco más de detalle:

● **Altitudes**	El **nivel cero** es el **nivel del mar**. Las **profundidades marinas** se indican con **números negativos** La **alturas** con números **positivo**	
● **Plantas** en los **edificios**	La **planta calle** es la planta **cero**. Los **sótanos** se representan por -1, -2,.. Las **plantas por encima** de la calle por 1, 2 ,3...	
● **Tiempo**	Para nuestro calendario el **año cero**, fue el año del nacimiento de Cristo. Usamos el calendario Juliano, pero no es el único vigente actualmente	*Alejandro Magno nació en el año 356 a C. , es decir 356 años antes de Cristo.* *Isaac Newton nació en 1642 o 1642 d.C.*
● **Temperaturas**	Cuando bajamos de **0ºC** en invierno decimos que estamos a **temperaturas negativas**: -5ºC, -2ºC Cuando estamos a temperaturas **superiores a cero**, tenemos **temperaturas positivas**	
● **Saldos bancarios**	Todos los **ingresos** vienen representados por <u>números positivos</u> Todos los **gastos o descuentos** se indican por números negativos	*Tengo un saldo de 400 euros , he pagado ayer de alquiler 500 y he recibido un ingreso de 200.* *Saldo: +400 euros* *Alquiler: -500 euros* *ingreso: + 200 euros* *Saldo final: +100 euros*
● **Aumentos o disminuciones**	Los *aumentos*, *incrementos,* ascensos y cualquier *movimiento hacia la derecha* o *hacia arriba* se representará por un **número positivo** Cualquier *disminución, pérdida, descenso o movimiento hacia la izquierda o hacia abajo* se representará por un **número negativo**	

más...

Números rojos.

Todos hemos oído en alguna ocasión la expresión "... está en **números rojos** ..." refiriéndose a una empresa o una persona cuya economía no funciona muy bien. Pero, ¿de dónde vienen los números rojos?, ¿quién se los inventó?.

Se han encontrado documentos en los que se usa el color rojo en la **China Imperial** entre los años **618 y 907** para indicar *pérdidas o gastos.* Usaban los números negativos de forma distinta a la actual, pero claramente distinguían los números **positivos,** en color **negro**, de los **negativos**, en color **rojo**.

Se tienen datos de que en **India** se usaban los números negativos hacia el año 600 de nuestra era. Como se ve los chinos los reinventaron después. En el Renacimiento los matemáticos italianos los introdujeron al resolver ecuaciones.

Si nos encontramos en números rojos significa que nuestra economía se comporta como el siguiente gráfico:

El uso de los números negativos facilita la gestión de las actividades en estas situaciones entre otras.

Conjunto de los enteros

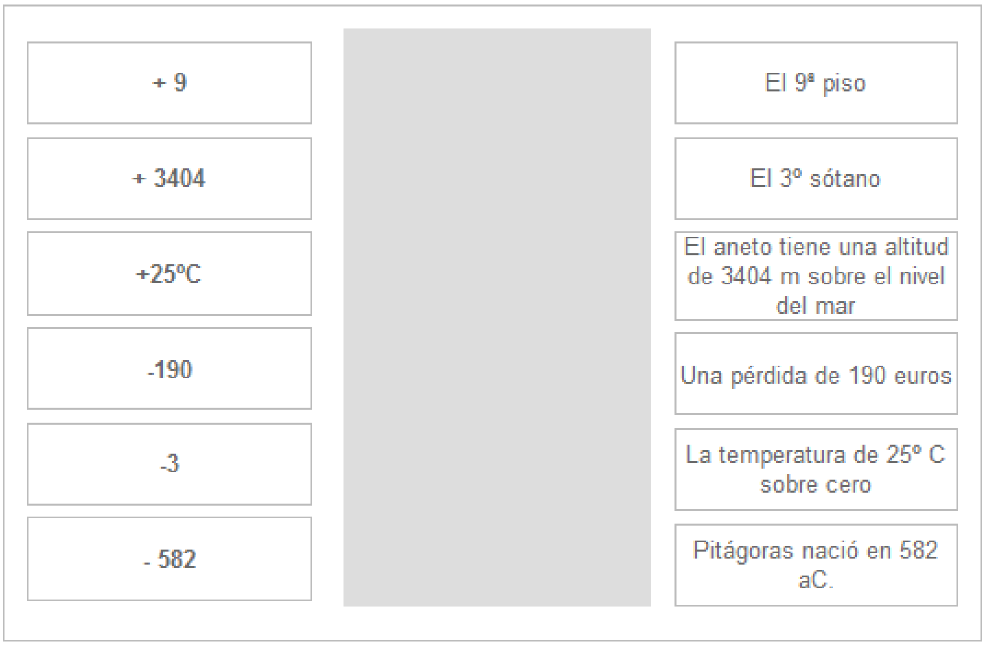
El conjunto de los números enteros está formados por el cero, 0, los números negativos -1, -2,-3, ... y los números positivos +1, +2, +3, +4 .... Los números positivos se pueden identificar con los números naturales, por ese motivo se suele suprimir el signo + que les precede.

Este conjunto se representa por la letra ℤ.

En la siguiente actividad deberás decidir el signo y el número que hay que asociar a la situación. Escribe primero el número y luego elige el signo y para que *aparezca la situación debes pulsar en otro ejercicio*:

Relaciona

Expresa con los signos correspondientes las siguientes situaciones.



+ 9
+ 3404
+25ºC
-190
-3
- 582

El 9ª piso
El 3º sótano
El aneto tiene una altitud de 3404 m sobre el nivel del mar
Una pérdida de 190 euros
La temperatura de 25º C sobre cero
Pitágoras nació en 582 aC.

Practica

1) *Escribe qué número corresponde a cada uno de los siguientes enunciado*

- ***a)*** *Luisa tiene 492 euros.*
- ***b)*** *La temperatura llegó a 34 ºC bajo cero.*
- ***c)*** *El globo sonda llegó a 23 m de altura.*
- ***d)*** *Nació en el año 450 antes de Cristo.*
- ***e)*** *El submarino está a 28 m bajo el nivel del mar.*
- ***f)*** *Marta debe 234 euros.*
- ***g)*** *La temperatura alcanzó los 37 ºC.*
- ***h)*** *Ha subido a la planta cuarta.*
- ***i)*** *Ha bajado al parking del tercer sótano.*

Comprueba

1. *a) +492 €*
b) -34º
c) +23
d) -450
e) -28m
f) -234€
g) +37º
h) +4
i) -3

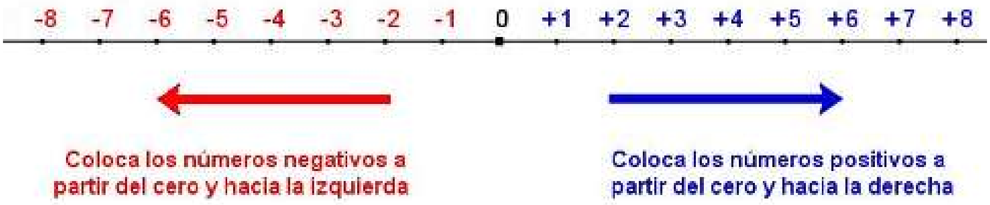
2. Características

Representación gráfica

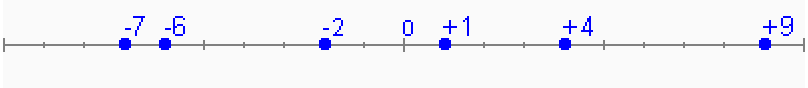
Los números enteros se representan gráficamente sobre una recta que llamaremos recta numérica.

- Se elige un punto origen que se denota por **0**.
- Los números positivos se colocan a su derecha, eligiendo una unidad.
- Los números negativos se colocan a su izquierda.

Observa en la siguiente figura cómo se organizan los números enteros en la recta numérica y cómo hemos seguido las instrucciones para construirla

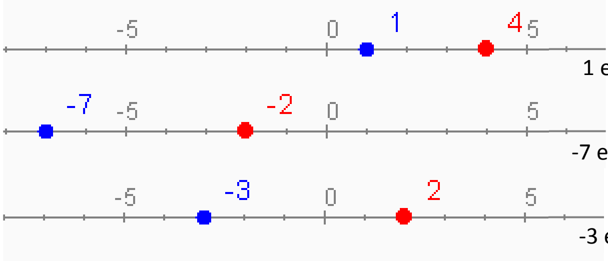


Ejemplo



Ordenación

En la representación gráfica de los números enteros en la recta se observa el orden que existe, un número es mayor que otro si está representado más a la derecha. A continuación tienes varios ejemplos:



1 < 4 **4 > 1**

1 es **menor que** 4 ó 4 es **mayor que** 1

-7 < -2 **-2 > -7**

-7 es **menor que** -2 ó -2 es **mayor que** 7

-3 < 2 **2 > 3**

-3 es **menor que** 2 ó 2 es **mayor que** 3

Resumiendo:

- Si los dos números enteros son positivos, es mayor el que está más alejado de cero.
- Si los dos números enteros son negativos, es mayor el que esté más cercano a cero.
- Si los dos números enteros tienen distinto signo, es mayor siempre el entero positivo.
- Cualquier entero negativo es menor que 0. Cualquier entero positivo es mayor que 0.

Practica

2) *Ordena los siguientes pares de números:*

a) *13 y -16* ***b)*** *-7 y 4* ***c)*** *24 y 23*

d) *-24 y 23* ***e)*** *-15 y -16* ***f)*** *-4 y -8*

3) *Ordena los siguientes números en cada uno de los casos*

a) *+47;+30; +14; +94* ***b)*** *-24; 27; 39; -70*

c) *14; -31; -97; -28* ***d)*** *-29; 18;--11; -52*

más…

El cero

El signo 0 para el cero apareció casi dos siglos después que el resto de los numerales y fue utilizado por primera vez en la India, según los datos que tenemos.

Pero no fue el primer signo utilizado para el cero, pues los mayas al principio de nuestra era (siglos antes que los hindúes, usaban un símbolo para el cero dentro de su sistema de numeración.

Unos dicen que se trata de un caracol y otros que se trata de un ojo semicerrado.

Comprueba

2. *a) -16<13*
b) -7<4
c) 23<24
d) -24<23
e) -16<-15
f) -8<-4

3. *a) 14<30<47<94*
b) -70<-24<27<39
c) -97<-31<-28<14
d) -52<-29<-11<18

Relaciona

Todos los números positivos	Los números mayores que -5 y menores que 4
{-4,-3,-2,-1}	Números negativos mayores que -5
{2,1,0,-1}	Números positivos mayores que -5
{-4,-3,-2.-1,0,1,2,3}	Números menores que 3 y mayores que -1

2.1. Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número entero es la distancia que le separa del cero. Se escribe entre dos barras **| |** y es el número sin su signo:

$$|+a| = a \qquad |-a| = a$$

El valor absoluto es una distancia por lo que no puede ser negativo, es un **número natural**.

- *Los números **3** y **-3** tienen el mismo valor absoluto que es 3, lo que quiere decir que están a la misma distancia del origen, el cero.*

Ejemplos

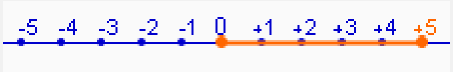
- $|+5| = 5$
- $|-7| = 7$
- $|-15| = 15$
- $|+117| = 117$

Es importante entender gráficamente el concepto de valor absoluto, en los ejemplos siguientes puedes observar cómo se entiende tal concepto.

Ejemplos

- *¿Cuál es el valor absoluto de +5?*

  Situamos +5 en la recta:

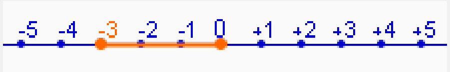


  La distancia de +5 a 0 es 5,
  esa distancia es el valor absoluto de +5

$$|+5| = 5$$

- *¿Cuál es el valor absoluto de -3?*

  Situamos -3 en la recta:



  La distancia de -3 a 0 es 3,
  esa distancia es el valor absoluto de -3

$$|-3| = 3$$

Practica

4) *Calcula el valor absoluto de los números: 4, -4, 0, 10, 6 y -12*

5) *¿Qué número o números tienen como valor absoluto 5?, ¿y 1?*

6) *¿Qué números distan de cero 6 unidades?*

Comprueba

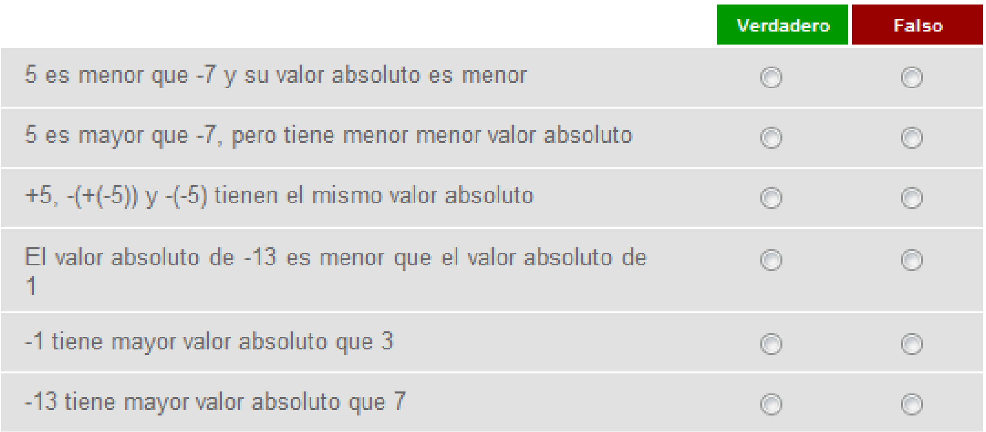
4. *|4|= 4; |-4|= 4;*
|0|= 0; |10|=10;
|6| = 6; |-12|=12

5. *5 y – 5*
1 y -1

6. *Los números 6 y -6*

Verdadero o falso

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas



	Verdadero	Falso
5 es menor que -7 y su valor absoluto es menor	○	○
5 es mayor que -7, pero tiene menor menor valor absoluto	○	○
+5, -(+(-5)) y -(-5) tienen el mismo valor absoluto	○	○
El valor absoluto de -13 es menor que el valor absoluto de 1	○	○
-1 tiene mayor valor absoluto que 3	○	○
-13 tiene mayor valor absoluto que 7	○	○

Relaciona

Encuentra el conjunto que cumple la propiedad que se indica

6, -6, 7 y -7

+7 y -7

-12

-2, -1, 0, 1, 2

Los números enteros con valor absoluto 7 son:

Los números que distan de cero menos de 3 unidades son

Los números con valores absolutos comprendidos entre 5 y 8 son:

Busca el número de valor absoluto 12 comprendido entre -13 y -11

2.2. Opuestos

El opuesto de un número entero es su **simétrico** respecto del **cero**. Se escribe así:

- **Op(+a) = -a** que también se puede escribir **- (+a) = -a**
- **Op(-a) = +a** que también se puede escribir **- (-a) = a**

Op(+5) = – 5

Op(– 7) = +7

Ejemplos

- *Lo opuesto de tener un gasto es tener una ganancia.*
- *Lo opuesto de 5ºC bajo cero es 5ºC sobre cero.*
- *Lo opuesto de bajar 5 pisos en un edificio es subir cinco pisos.*

Una propiedad importante:

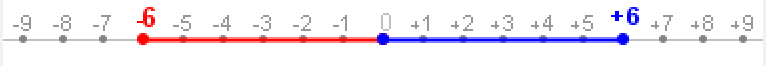
- El valor absoluto de un número y de su opuesto es siempre el mismo

Es importante estudiar lo que sucede **gráficamente** con un entero y su opuesto, puedes observarlo en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

- *Si hablamos de dinero, ¿cómo están relacionadas las cantidades +6 € y -6 €?*

  Los representamos en la recta:

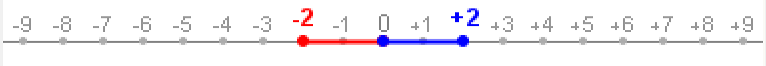


  Lo contrario de tener 6 € es deber 6 €, y viceversa, por eso son opuestos.

  Se escribe: Op (+6) = - 6 ó Op(-6) = +6 *Son simétricos respecto del cero.*

- *Si hablamos de temperatura, ¿cómo están relacionadas las cantidades 2 ºC y -2 ºC?*

  Los representamos en la recta:

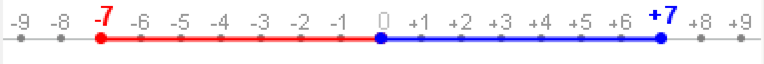


  Lo contrario de 2 ºC sobre cero es 2 ºC bajo cero y viceversa, son opuestos.

  Se escribe: Op (+2) = - 2 ó Op(-2) = +2

- *Si hablamos de temperatura, ¿cómo están relacionadas las cantidades 2 ºC y -2 ºC?*

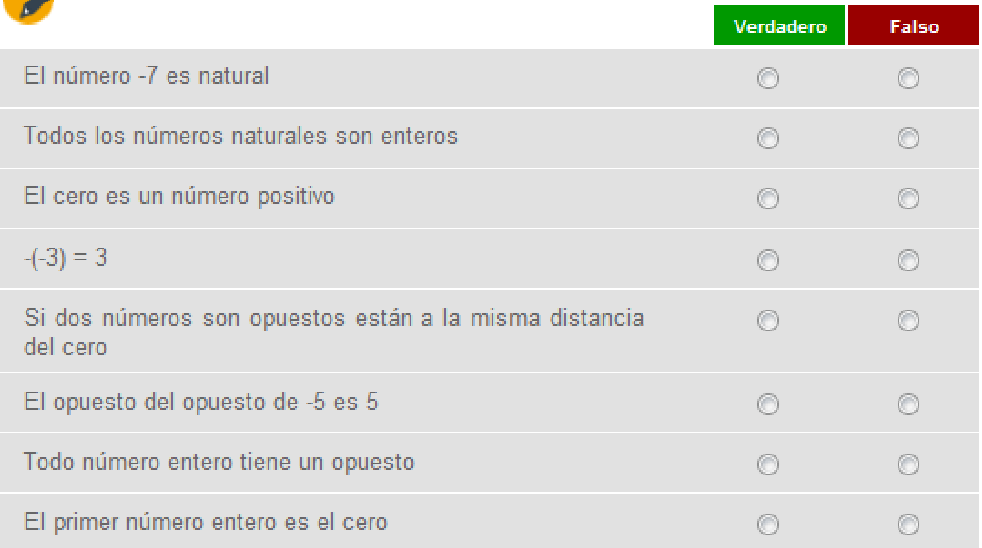
  Los representamos en la recta:



  Lo contrario de 2 ºC sobre cero es 2 ºC bajo cero y viceversa, son opuestos.

  Se escribe: Op (+2) = - 2 ó Op(-2) = +2

Verdadero o falso



	Verdadero	Falso
El número -7 es natural	○	○
Todos los números naturales son enteros	○	○
El cero es un número positivo	○	○
-(-3) = 3	○	○
Si dos números son opuestos están a la misma distancia del cero	○	○
El opuesto del opuesto de -5 es 5	○	○
Todo número entero tiene un opuesto	○	○
El primer número entero es el cero	○	○

Practica

7) *Calcula los opuestos de los números siguientes: 12, -13, 0, -3, 3*

8) *Halla el opuesto del opuesto de -3 y de 4*

9) *Calcula el simétrico respecto de cero de los números: 4, -4, 0, 10, 6, -12*

10) *¿Qué números distan de cero el doble que 7?*

Comprueba

7. *-12, 13, 0, 3, -3*

8. *-3, 4*

9. *-4; 4; 0, -10, -6 y 12*

10. *-14 y 14*

Paréntesis

A partir de ahora los **signos** de las operaciones suma y resta tienen más de un significado.

- El **signo más (+)** tiene dos significados: puede indicar **suma** y puede indicar que el número es **positivo**.
- El **signo menos (–)** tiene dos significados: puede indicar resta y puede indicar que el número es **negativo**.

Como escribimos en la página anterior el **opuesto de un número** se puede indicar de dos formas **op(–5)**, o bien, **– (–5)**. Esta última es la más usada en matemáticas, por eso es muy importante que te familiarices con ella.

Desde el punto de vista de la claridad en la escritura tenemos que **no podemos escribir dos signos seguidos**, debemos separarlos mediante un paréntesis. Pero para facilitar el trabajo tendremos en cuenta que:

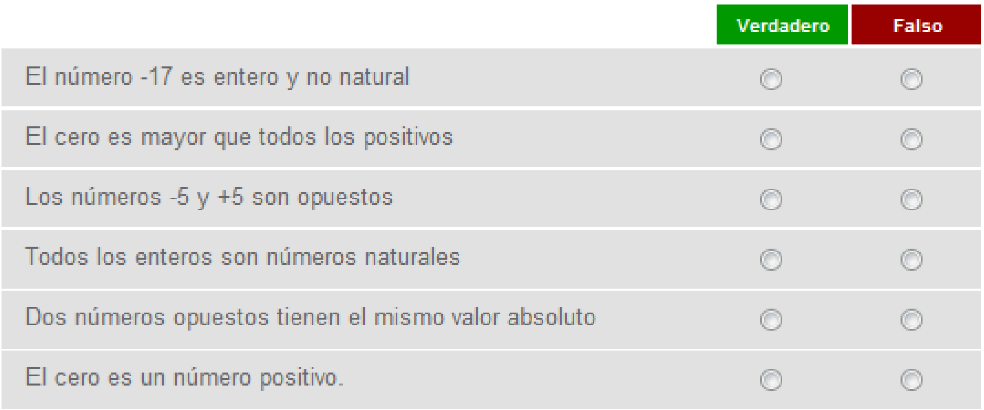
+(+a) = +a .... – (+a) = –a
+(–a) = –a .... – (–a) = +a

Ejemplos

● $+(+5) = +5 = 5$	● $-(+15) = -15$
● $+(-7) = -7$	● $-(-17) = +17 = 17$
● $-(-(+3)) = -(-3) = +3 = 3$	● $-(+(-6)) = -(-6) = +6 = 6$
● $-(+(+4)) = -(+4) = -4$	● $-(-(-10)) = -(+10) = -10$

Verdadero o falso

Decide si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones.



	Verdadero	Falso
El número -17 es entero y no natural	○	○
El cero es mayor que todos los positivos	○	○
Los números -5 y +5 son opuestos	○	○
Todos los enteros son números naturales	○	○
Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto	○	○
El cero es un número positivo.	○	○

Practica

11) *Elimina los paréntesis:*

a) +(+13)	**b)** +(-9)	**c)** -(+6)	**d)** -(-8)
e) +(+(+(13))	**f)** +(+(-15))	**g)** +(-(+8))	**e)** -(+(+12))
i) +(-(-7))	**j)** -(+(-17))	**k)** -(-(+8))	**l)** -(-(-14))

Comprueba

11. *a) 13;*	*b) -9*
c) -6;	*d) 8*
e) 13;	*f) -15*
g) -8;	*h) -12*
i) 7;	*j) 17*
k) 8;	*l) -14*

3. Operaciones

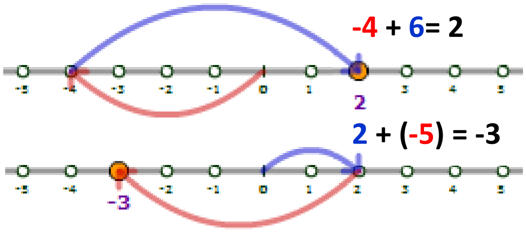
Suma de números enteros

Dentro de unos grandes almacenes se nos pueden dar las siguientes situaciones:

Situación real	*En Matemáticas escribiremos*
Estás en la planta 1 y vas a subir 4 plantas, acabarás en la planta 5	*(+1)+ (+4) = 1+4 = 5*
Estás en la planta 5 y desciendes 3 plantas, acabarás en la planta 2.	*+5 + (-3) = +2*
Estás en la planta -2 y subes 5 plantas, llegarás a la planta 3.	*(-2) + (+5) = -2 + 5 = 5 - 2 = 3*
Estás en la planta 2 y bajas 4 plantas hasta el aparcamiento, acabarás en la planta -2.	*+2 + (-4) = 2 - 4 = -2*
Estás en la planta -1, la del supermercado, y bajas 2 plantas, acabarás en la planta - 3	*-1 + (-2) = -1 - 2 = -3*

Fíjate en que los ascensos se representan por números positivos y los descensos por números negativos. Ya sabes que los sótanos o niveles bajo el suelo se identifican con los números negativos.

En la imagen puedes ver una situación similar sobre la recta numérica, partiendo de un punto, ¿qué número, positivo o negativo, hay que sumar para llegar a otro?.



Ejemplos

● $(+19)+(+9)=19+9=28$	● $(+19)+(-9)=19-9=10$
● $(-13)+(+11)=-13+11=-2$	● $(-11)+(+14)=-11+14=3$
● $(-19)+(-19)=-19-19=-38$	● $(+19)+(-20)\ =\ 19-20\ =\ -1$
● $(-16)+(-8)=-16-8=-24$	● $(-10)+(+10)=-10-10=0$

más...

Propiedades

La suma tiene las siguientes propiedades:

Es **uniforme**: la suma de dos números enteros es un número entero.

Conmutativa: el orden de los sumandos no altera el resultado

a + b = b + a

Asociativa: Así la suma se puede realizar con más de dos sumandos

a + (b + c) = (a + b) + c

Hay un **elemento neutro**: el **cero**, **0**, que cumple:

a+0 = 0 cualquiera que sea **a**

Cada número entero tiene un **opuesto**,

a y **-a** son opuestos,

lo que quiere decir que su suma es el cero.

Practica

12) *Efectúa las siguientes operaciones:*

__a)__ (-3)+(+4) *__b)__ (+8)+(-9)+(+6)* *__c)__ (-18)+(-7)*

__d)__ (-8)+(-5)+(-3) *__e)__ (+11)+ (+10)* *__f)__ (-15)+(+10)+(-3)*

__g)__ 4 +(-7) + 6 *__h)__ -6 + 8 +(-4)* *__i)__ 5 + 9 + (-7)*

Comprueba

__12.__ a) 1 b) 5 c) -25

d) -16 e) 21 f) -8

g) 3 h) -2 i) 7

más...

Resta

La resta de dos números **a-b** responde a la pregunta: ¿Qué número sumado con **b** tendrá **a** como resultado?.

El vocabulario asociado es:

a es el **minuendo**

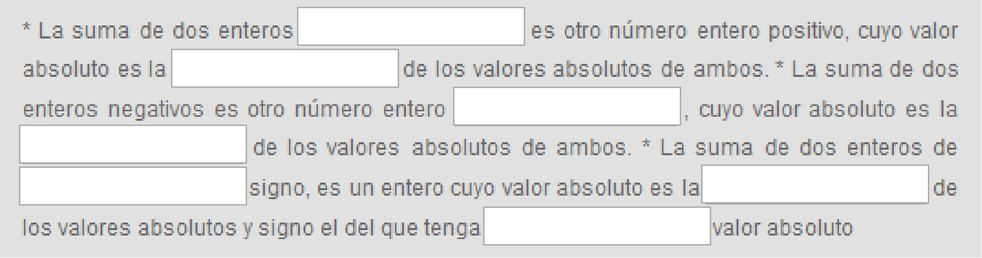
b es el **sustraendo**

Y el resultado, **c**, la resta, cumple siempre

a = b + c

Con los números enteros vemos que la resta siempre es posible, siempre podemos responder a la pregunta que nos hacíamos al principio.

Completa



* La suma de dos enteros ______ es otro número entero positivo, cuyo valor absoluto es la ______ de los valores absolutos de ambos. * La suma de dos enteros negativos es otro número entero ______, cuyo valor absoluto es la ______ de los valores absolutos de ambos. * La suma de dos enteros de ______ signo, es un entero cuyo valor absoluto es la ______ de los valores absolutos y signo el del que tenga ______ valor absoluto

Resta de enteros

Una de las consecuencias más importantes de la aparición de los números enteros es que ***la operación de restar siempre es posible***.

En el conjunto de los números naturales si el minuendo era menor que el sustraendo la resta no tenía significado. En el conjunto de los números enteros el resultado de un resta siempre tendrá sentido pues nos indicará una deuda o descenso si es negativo.

Para restar dos números enteros ***sumaremos al minuendo el opuesto al sustraendo***:

$$a - b = a + (-b)$$

y esta operación, como suma, ya vimos en el apartado anterior que siempre era posible.

Fíjate en los siguientes ejemplos:

Ejemplos

● $(+5) - (-16) = 5 + 16 = 21$	● $(-20) - (+3) = -20 - 3 = -23$
● $(+15) - (+2) = 15 - 2 = 13$	● $(+5) - (+5) = 5 - 5 = 0$
● $(-18) - (-3) = -18 + 3 = -15$	● $(-3) - (+5) = -3 - 5 = -8$
● $(+15) - (-6) = 15 + 6 = 21$	● $(-8) - (-13) = -8 + 13 = 5$

Practica

13) *Efectúa las operaciones indicadas:*

a) *(+7) – (–4)* ***b)*** *(–4) – (+12)* ***c)*** *(–3) – (+4)*

d) *– (–12) – (+4)* ***e)*** *(–37) – (–15)* ***f)*** *(–37) – (–27)*

g) *(–15) + (–7)* ***h)*** *– (–5) - (–7)* ***i)*** *(–5) – (–7)*

Comprueba

13. *a) 11; b) -16; c) -7*

d) 8; e) -22; f) -10

g) -22; h) 12; i) 2

Uso de los paréntesis

Habrás visto que hemos ido haciendo uso de los paréntesis al escribir operaciones entre los números enteros. Siempre que haya dos signos de operaciones seguidos los usaremos para clarificar la escritura.

- ***Primera situación***: como ya vimos anteriormente aparecen paréntesis

-(-a) = +a = a **-(+a)= - a** **+(-a) = -a** **+(+a) = +a = a**

Así eliminamos los paréntesis y simplificamos la escritura. Con lo cual podremos simplificar expresiones como las siguientes:

Ejemplos

- $(-3)+(-5)+\ (+4)=-3-5+4=-8+4=-4$
- $-(-3)—5-(+4)=+3+5-4=8-\ 4\ =\ 4$
- $-(-3)+(-5)-(-4)=+3-\ 5+4=-2+4=2$
- $(-3)-(+5)+(-4)=-3-5-4=-8-4=-12$

Lo primero que hemos hecho ha sido suprimir los paréntesis y a continuación operar los números de izquierda a derecha.

- ***Segunda situación***: en el interior del paréntesis aparece una operación ya sea suma o resta, en este caso se pueden hacer dos cosas:

1. Se eliminan los paréntesis y se suma y resta normalmente, si va precedido de un signo menos,"–", habrá que cambiar de signo todos los números del interior del paréntesis.

Ejemplos

- $-(7+8)=-7-\ 8=-15$ *ya que el paréntesis lleva delante un signo "–"*
- $+(-5+8)=-5+8=3$ *ya que el paréntesis va precedido de un signo "+"*

2. Se operan los números que aparecen en los interiores de los paréntesis y luego se eliminan.

Ejemplos

- $-(7+8)=-15$ *Hemos sumado los dos números del interior del paréntesis.*
- $+(-5+8)=+(+3)=3$ *Pues -5 + 8 = +3, hemos operado el interior.*

Este último método es en la mayor parte de las ocasiones el más eficaz.

Veamos ahora otros ejemplos, en los que intervienen tres números enteros y aparecen paréntesis precedidos de signos "+" y "–". Observarás que se hacen por los dos métodos que se han indicado. Debes tener en cuenta que para **suprimir un paréntesis precedido de signo menos,** hay que **cambiar los signos de los números que aparecen dentro**, ya que estás calculando sus opuestos

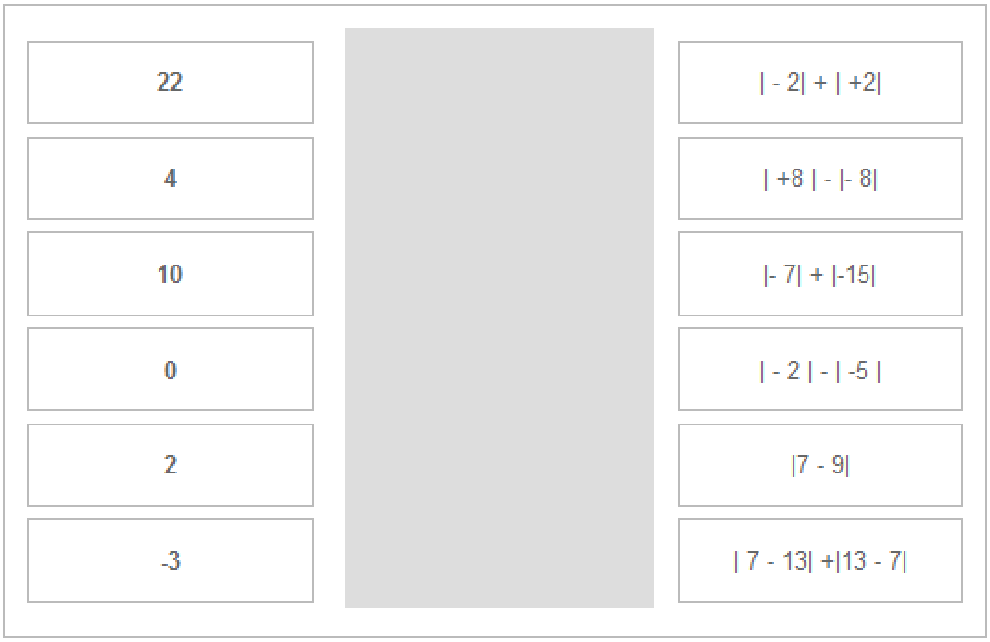
Ejemplos

● $1+(-12+4)=1-12+4=-7$	● $1+(-12+4)=1+(-8)=-7$
● $9-(7-4)\ =\ 9-7+4=6$	● $9-(7-4)=9-3=6$
● $15-(-3\ +6)\ =15+3-6=12$	● $15-(-3\ +6)\ =15-3=12$
● $-9-(-4-5)=-9\ +4\ +5=0$	● $-9-(-4-5)=-9-(-9)=0$

Nota: nos queda una situación que incluye otras operaciones además de la suma que trabajaremos más adelante, ahora debes practicar lo citado en esta página.

Relaciona

Cada expresión con su valor correspondiente



22	| - 2| + | +2|
4	| +8 | - |- 8|
10	|- 7| + |-15|
0	| - 2 | - | -5 |
2	|7 - 9|
-3	| 7 - 13| +|13 - 7|

Practica

14) *Efectúa las siguientes operaciones:*

a) –4 – (5 – 7) – (4 + 5)
b) (–7) – [(+3) + (+4) – (+ 5)]
c) (3 – 8) + [5 – (–2)]
d) (7 – 2 + 4) – (2 – 5)
e) 1 – (5 – 3 + 2)
f) [5 – (6 – 3 + 1) – 2]

15) *Resuelve los ejercicios:*

a) (–2) + (–3) – (+4)
b) –(+4) – [(–5) + (–7)]
c) –[(–37) – (–15)] + (–7)
d) (+7) – (–4) – (+12)
e) –38 + 6 + [(–13) – (–2)]
f) [15 + (–2)] – [–6 – (6– 13) + 14]

16) *Luis después de subir 8 pisos para buscar a su amigo Juan llega a la planta 5. ¿En qué planta estaba?*

17) *El saldo de una cuenta corriente es de 200 euros. Se ha descontado un recibo por valor de 249 euros. ¿Cuál es el nuevo saldo?*

18) *Ana no ha podido fabricar 13 de los artículos que le habían encargado, así que ha dejado de ganar 26 euros. ¿Qué precio tiene cada uno de los artículos?*

19) *Un avión vuela a 990 m de altitud. En su vertical detecta un submarino situado a 40 m bajo el nivel del mar. ¿Qué distancia separa a ambos?*

20) *Una persona nació en el año 68 antes de Cristo y tenía 25 años cuando se casó. ¿En qué año se casó?*

21) *En una estación de esquí el termómetro marcaba 3°C en el aparcamiento. Si un punto de la estación está 800 m por encima del aparcamiento y la temperatura disminuye a razón de 2°C cada 100 m. ¿Qué temperatura habrá en el punto citado?*

Comprueba

14. *a) -11; b) -9*
c) 2; d) 12
e) -3; f) 1

15. *a) -9; b) 8*
c) 15; d) -1
e) -43; f) -2

16. *En planta -3*

17. *Nuevo saldo -49€*

18. *Costaba 2 €*

19. *Desnivel 1030m*

20. *Se casó en -43 aC.*

21. *Está a -15°C.*

3.1. Producto y cociente

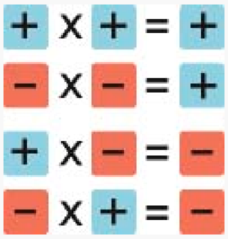
Producto

Para **multiplicar** dos números enteros deberemos tener en cuenta los valores absolutos de dichos números y los signos de ambos. El método para hacer el **producto** consiste en **multiplicar los signos** con la regla de los signo y **multiplicar los valores absolutos de los factores**.

Así, El *producto de dos números enteros* es <u>*otro número entero*</u> que tiene como <u>*valor absoluto*</u> el <u>*producto de los valores absolutos*</u> y va precedido del <u>*signo*</u> que se obtiene según la regla de los signos que aparece figura en la imagen inferior.

Tienes a continuación una serie de ejemplos:

Regla de los signos



Producto de dos enteros positivos

$$(+5)\cdot(+6) = +(5\cdot 6) = 30$$

Producto de dos enteros negativos

$$(-5)\cdot(-6) = +(5\cdot 6) = 30$$

Producto de dos enteros de distinto signo

$$(-5)\cdot(+6) = -(5\cdot 6) = -30$$

$$(+5)\cdot(-6) = -(5\cdot 6) = -30$$

La multiplicación que aprendiste con los números naturales es la base del producto con números enteros. Observa atentamente los siguientes productos:

Más ejemplos

- $(+3)\cdot(+5) = +15 = 15$
- $(-4)\cdot(-6) = +24 = 24$
- $(-5)\cdot(+7) = -35$
- $(+6)\cdot(-4) = -24$

Completa el texto

* El producto de dos enteros ____ es otro número entero positivo, cuyo valor absoluto es el ____ de los valores absolutos de ambos. * El producto de dos enteros negativos es otro número entero ____, cuyo valor absoluto es el ____ de los valores absolutos de ambos. * El producto de dos enteros de ____ signo, es un entero cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos y signo ____. El producto por el número entero ____ es igual a ____

Practica

22) *Efectúa las siguientes multiplicaciones:*

a) *(–4) · (–12)*	***b)*** *(–5) · (+9)*	***c)*** *– (+4) · (–3)*
d) *(–2) · (–7)*	***e)*** *(–2) · (+7) · (–5)*	***f)*** *(–5) · (+8)*
g) *(–4) · (–2) · (+5)*	***h)*** *(–3) · (–5) · (–5)*	***i)*** *(–4) · (+6)*

más…

Propiedades del producto

El producto tiene las siguientes propiedades:

Es **uniforme**: el producto de dos números enteros es un número entero.

Conmutativa: el orden de los factores no altera el resultado

a · b = b · a

Asociativa:

a · (b · c) = (a · b) · c

Así el producto se puede realizar con más de dos factores.

Hay un **elemento neutro**, el **número entero 1**, que cumple **a · 1 = a** cualquiera que sea **a**.

Comprueba

22. *a) 48 b) -45 c) 12*
d) 14 e) 70 f) -40
g) 40 h) -75 i) -24

Cociente de dos enteros

A veces nos surge la pregunta *¿por qué hay que multiplicar 6 para obtener -54? ¿Y para obtener 24?.*

Estas preguntas se responden con la operación de dividir.

- La **división** de dos números enteros **a** y **b** *consiste* en encontrar un **número entero c**, tal que **a = b · c** si la división es **exacta**.

En el caso de que no sea **exacta**, la **división** se llama **entera** y consiste en encontrar dos números **c *(cociente)*** y **r *(resto)*** que cumplan la igualdad **a = b · c + r**

Los nombres que reciben son como en el caso de los números naturales: **dividendo: a**, **divisor: b**, **cociente: c**, **resto: r**.

Igual que para multiplicar dos enteros, para dividirlos tendremos que tener en cuenta los valores absolutos y los signos:

Regla de los signos

+ ÷ + = +

− ÷ − = +

+ ÷ − = −

− ÷ + = −

División de dos números positivos

$$(+18):(+6) = +(18:6) = +3 = 3$$

División de dos números negativos

$$(-18):(-6) = +(18:6) = +3 = 3$$

División de dos números de distinto signo

$$(-18):(+6) = -(18:6) = -3$$

$$(+18):(-6) = -(18:6) = -3$$

La **división exacta de dos números enteros** cuando es posible *es* otro número entero, cuyo valor absoluto es el cociente de los valores absolutos de los números y signo obtenido por la regla de los signos que aparece en la parte superior.

Observa bien los siguientes ejemplos:

Más ejemplos

- $(+36):(+12) = +(36:12) = 3$
- $(-48):(-12) = +(48:12) = 4$
- $(+56)\cdot(-7) = -(56:7) = -8$
- $(-65):(+13) = -(65:13) = -5$

más...

División

Cuando dividimos dos números

a : b

nos hacemos la pregunta, **¿qué número multiplicado por b tiene a como resultado?**

Puede ser que encontremos el número exacto que responde a la pregunta, **división exacta**

a : b = c o lo que es equivalente **a = b·c**

El vocabulario asociado a la división:

a se llama **dividendo**
b se llama **divisor**
c se llama **cociente**

Y **r** para el **resto** en el caso de que no sea exacta

Fíjate que no es una *operación conmutativa*, no es lo mismo **a:b** que **b:a**

Tampoco podemos *dividir para cero*, no sabemos cuál es el resultado.

No tiene la *propiedad asociativa*, mira el ejemplo

16:(4:2)= 16:2=8

(16:4):2= 4:2 =2

Sí tiene un *elemento neutro* el número 1

Practica

23) *Efectúa las siguientes operaciones:*

a) *(+20): (+10)* ***b)*** *(–120): (–20)* ***c)*** *(–12): (+3)*

d) *(+30): (–6)* ***e)*** *(–27) : (–3)* ***f)*** *[(–4) · 3] : (–2)*

g) *(+30): [(–6)·5]* ***h)*** *(–7) · (+2) · (–2) : (–4)* ***i)*** *–[(–4) · (–3) : (–2)]*

Comprueba

23. *a) 2; b) 6; c) -4*

d) -5; e) 9; f) 6

g) -1; h) -7; i) -6

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva permite relacionar la suma y el producto de números enteros. Su expresión es:

a · (b + c) = a · b + a · c o bien **(b + c) · a = b · a + c · a**

Ambas expresiones tienen el mismo significado ya que el producto tiene la propiedad conmutativa.

Ejemplo

- *Comprueba* $-5 \cdot (4+6) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot 6$

  La primera parte: $-5 \cdot (4\ +\ 6) = -5 \cdot\ 10 = -50$
  si efectuamos primero la suma que hay dentro del paréntesis.

  La segundad parte: $-5 \cdot 4 + (-5) \cdot 6 = -20 + (-30) = -20 - 30 = -50$

También podríamos escribirla para la resta: 5 -6 – 8

a · (b – c) = a · b – a · c o bien **(b – c) · a = b · a – c · a**

Ejemplos

- *Comprueba* $-5 \cdot (4-6) = -5 \cdot 4 - (-5) \cdot 6$

  La primera parte: $-5 \cdot (4-6) = -5 \cdot (-2) = 10$
  si efectuamos primero la suma que hay dentro del paréntesis.

  La segundad parte: $-5 \cdot 4 - (-5) \cdot 6 = -20 - (-30) = -20 + 30 = 10$
  (como es +10 suprimimos el signo)

Si escribiéramos la propiedad distributiva de derecha a izquierda: **a · b + a · c = a · (b + c)** tendríamos un procedimiento que se conoce como **sacar factor común**.

Ejemplos

- *Sacar factor común en* $36 + 63$

  Como 36 y 54 son múltiplos de 9, la expresión anterior se puede escribir:

  $$36 + 63 = 9 \cdot 4\ +\ 9 \cdot 7 = 9 \cdot (4+7)$$

  O también, $36\ + 63 =\ (-9) \cdot (-4) + (-9) \cdot (-7) = (-9) \cdot [-4 + (-7)]$

Practica

24) *Aplica la propiedad distributiva:*

a) *8·[9 + (-2)]*	***b)*** *(-5)·[(-10) – (+9)]*
c) *11·[-3 + 6]*	***d)*** *-4·[(-9) - (-9)]*
e) *18·(5 + 6)*	***f)*** *2·(-1 + 10)*
g) *(-17)·[(-9) - (-2)]*	***h)*** *(-17)·[(-2)-(-9)]*

Comprueba

24. *a) 56*	*b) 95*
c) 33	*d) 0*
e) 198	*f) 18*
g) 119	*h) -119*

3.2. Operaciones combinadas

Jerarquía de operaciones

Cuando se realizan operaciones combinadas con números enteros, éstas no se pueden realizar de forma arbitraria, hay una serie de reglas que nos permiten operar correctamente, que se conocen como **prioridad o jerarquía de operaciones**.

En este momento, y mientras no aparezcan nuevas operaciones la **prioridad** es:

1º Si hay paréntesis, se resuelven las operaciones interiores o se suprimen.
2º Las multiplicaciones y divisiones
3º Las sumas y restas
4º En operaciones de un mismo nivel se empieza por la izquierda.

Ejemplos

● $3 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 7 = 3 + 30 - 42 = 32 - 42 = -10$	*Realizamos primero los productos y cocientes*
● $5 \cdot 4 - 6 \cdot 4 + 27 : 9 = 20 - 24 + 3 = -4 + 3 = -1$	
● $4 - 3 \cdot (6 - 3 \cdot 7) = 4 - 3 \cdot (6 - 21) = 4 - 3 \cdot (-15) =$ $= 4 + 45 = 49$	*Hemos hecho las operaciones interiores de los paréntesis, teniendo en cuenta la prioridad*
● $7 - 10 : [8 + 9 : (-3)] = 7 - 10 : (8 - 3) = 7 - 10 : 5 =$ $= 7 - 2 = 5$	

Practica

Encuentra el valor de cada una de las expresiones siguientes

15		2·(6 + 2) - 3·2 + 5
- 5		2·(6 + 2) - 3·(2 + 5)
13		2· 6 + 2 - 3·2 + 5
15		2·6 + (2 - 3)·(2 + 5)
5		2·6 + (2 - 3)·2 + 5

Practica

25) *Efectúa las operaciones combinadas siguientes:*

a) $-8 + 7 \cdot (-9 + 8)$
b) $-5 + (-6) : (-4 + 2)$
c) $6 - 2 \cdot 7 + 6 : 6$
d) $2 - (7 - 4 \cdot 7) : (-3)$
e) $2 \cdot (8 - 8 : 4) + (-8 - 1)$
f) $5 - (-30) : (+6)$
g) $3 - (-1) : (2 - 3) - 2 - 1$
h) $(7 - 3 \cdot 2) \cdot 18 : (1 + 4 : 2)$
i) $2 \cdot (4 - 30 : 5) + (-6 - 3)$
j) $8 \cdot 7 - (-8) : (10 - 6)$
k) $-1 + 2 \cdot (-4 + 4 \cdot 2) - (-7 + 14)$
l) $(6 + 4) \cdot [8 - (7 - 7)]$

Comprueba

25. *a) -15; b) -2*
c) -7; d) -5
e) -3; f) 10
g) -1; h) 6
i) -13; j) 58
k) 0; l) 80

4. Potencias

Definición de potencia

Una **potencia** es una forma abreviada de indicar el producto de factores iguales.

El número que se repite como factor, se llama **base** y el número de veces que se repite lo indica el **exponente**.

Se escribe: $a^n = a \cdot a \cdot ....^{(n}.. \cdot a$

*a es la **base** y **n** el **exponente***

$$\text{base}^{\text{exponente}}$$

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

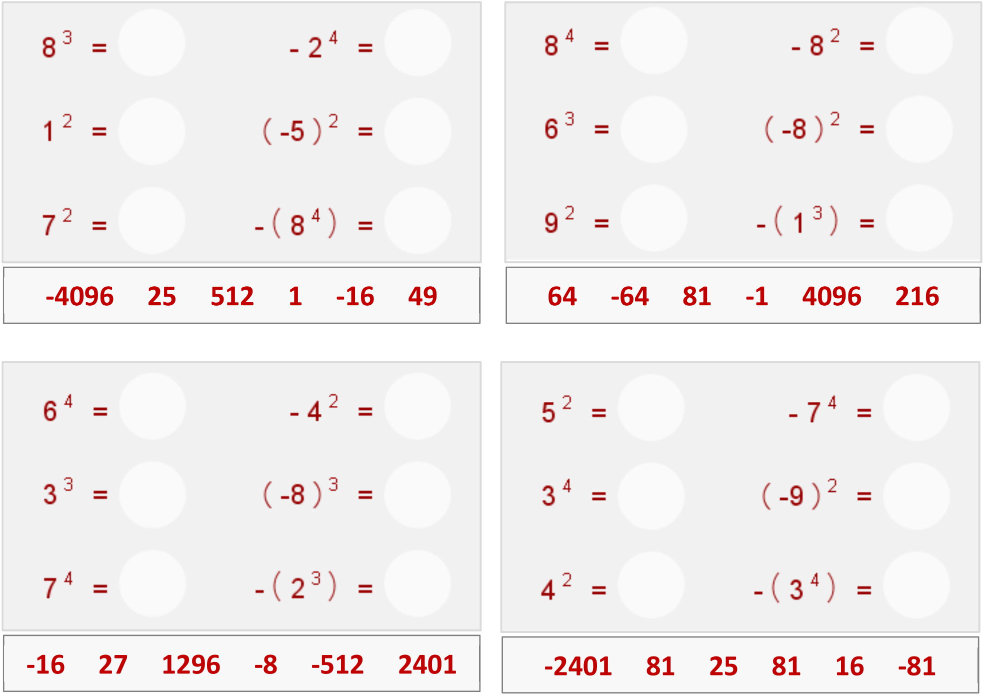
Ejemplos

Si la base es un número positivo:	$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
Si la base es un número negativo:	$(-4)^5 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -1024$ $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$

Y ahora practica en la siguiente actividad

Practica

Escribe el valor adecuado al lado de cada potencia, seleccionándolo en cada caso de entre los que aparecen en la parte inferior



$8^3 =$ ○ $-2^4 =$ ○
$1^2 =$ ○ $(-5)^2 =$ ○
$7^2 =$ ○ $-(8^4) =$ ○

-4096 25 512 1 -16 49

$8^4 =$ ○ $-8^2 =$ ○
$6^3 =$ ○ $(-8)^2 =$ ○
$9^2 =$ ○ $-(1^3) =$ ○

64 -64 81 -1 4096 216

$6^4 =$ ○ $-4^2 =$ ○
$3^3 =$ ○ $(-8)^3 =$ ○
$7^4 =$ ○ $-(2^3) =$ ○

-16 27 1296 -8 -512 2401

$5^2 =$ ○ $-7^4 =$ ○
$3^4 =$ ○ $(-9)^2 =$ ○
$4^2 =$ ○ $-(3^4) =$ ○

-2401 81 25 81 16 -81

más...

Potencias especiales

Hay unos casos especiales muy importantes:

1. La **base** es el número **0**.

$0^2 = 0$, $0^5 = 0$...

Su **resultado es cero** si el exponente es distinto de cero.

2. La **base** es **1**.

$1^2 = 1$, $1^5 = 1$...

Su **resultado** *siempre* es **1**

3. Si el **exponente** es **0**.

$3^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$...

Su **resultado** es siempre **1** si la base es distinta de cero

Propiedades de las potencias

Producto de potencias de la misma base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $7^5 \cdot 7^4 = 7^9$

- El producto de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base y como exponente la suma de los exponentes.

Cociente de potencias de la misma base $a^m : a^n = a^{m-n}$ $7^6 : 7^4 = 7^2$

- El cociente de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base y como exponente la diferencia de los exponentes.

Potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(7^4)^3 = 7^{12}$

- La potencia de una potencia es otra potencia de la misma base y exponente el producto de los exponentes.

Producto de potencias con igual exponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $3^3 \cdot 5^3 = (3 \cdot 5)^3$

- Para multiplicar potencias que tienen el mismo exponente se multiplican las bases y el resultado se eleva al exponente común.

Cociente de potencias con igual exponente $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\frac{3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

- Para dividir potencias que tienen el mismo exponente se dividen las bases y el resultado se eleva al exponente común.

Más ejemplos

● $(-2)^5 \cdot (-2)^3 = (-2)^8 = 256$	● $(-3)^6 : (-3)^3 = (-3)^3 = -27$
● $2^4 \cdot 2^3 : 2^5 = 2^{4+3-5} = 2^2 = 4$	● $(5^2)^4 : 5^3 = 5^8 : 5^3 = 5^3 = 125$
● $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$	● $(-8)^5 : 4^5 = (-8:4)^5 = (-2)^5 = -32$

Has podido observar que no aparecen propiedades de las potencias con la suma y la resta, y es que sólo hay una forma de *sumar potencias y es efectuando las potencias y sumando los resultados.* No influye si tienen la misma o igual base.

Observa los siguientes ejemplos:

● $4^3 + 3^3 = 64 + 27 = 91$	● $(4 + 3)^3 = 7^3 = 343$
● $5^2 - 7^2 = 25 - 49 = -24$	● $(5 - 7)^2 = (-2)^2 = 4$
● $5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150$	● $5^4 - 5^2 = 625 - 25 = 600$

Como puedes ver la suma de potencias no es la potencia de la suma, lo mismo sucede con la operación de restar.

Practica

26) *Calcula utilizando las propiedades de las potencias:*

a) $4^5 \cdot 4^7$ **b)** $(-3)^5 \cdot (-3)^4$ **c)** $(-3)^3 \cdot (-3)^5$

d) $\frac{2^7}{2^5}$ **e)** $\frac{(-3)^7}{(-3)^4}$ **f)** $\frac{(-4)^7}{4^3}$

g) $(4 \cdot 2)^3$ **h)** $(-5 \cdot 3)^4$ **i)** $(-2)^2 \cdot (5)^2$

j) $\left(\frac{15}{3}\right)^3$ **k)** $\left(\frac{-28}{7}\right)^4$ **l)** $\frac{12^5}{3^5}$

m) $(3^2)^5$ **n)** $((-2)^3)^5$ **ñ)** $((-3)^2)^5$

Comprueba

26. a) 4^{12}; b)-3^9; c) 3^8
d) 2^2; e) -3^3; f) -4^4
g) 512; h)15^4; i) -100
j) 5^3; k) 4^4; l) 4^5
m) 3^{10}; n) -2^{15}; ñ) 3^{10}

5. Raíces cuadradas

Definición

Como ya sabes potencias de exponente 2 reciben el nombre de cuadrados. Así al escribir $\mathbf{a^2}$ leemos **"a elevado al cuadrado"**. A los números que se obtienen como resultado de elevar al cuadrado los números naturales se les llama **cuadrados perfectos.**

Puedes ver en la siguiente tabla los veinte primeros:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Los cuadrados perfectos se pueden interpretar como el área de un cuadrado cuyo lado es un número natural. Pero lo que nos interesa ahora es la situación contraria. Si conocemos el área del cuadrado ¿cómo conseguir la medida del lado?.

Para ello introducimos una nueva operación llamada **raíz cuadrada**.

- En este ejemplo puedes ver cómo se escribe la raíz cuadrada de un número:

$$\sqrt{64} = 8 \quad \text{porque} \quad 8^2 = 64$$

Pero no olvidemos que $(-8)^2 = 64$ por lo tanto, también $\sqrt{64} = -8$

$$\sqrt{64} = \pm 8$$

En general diremos que el número **r**, es la **raíz cuadrada** de un número **a** si se cumple que al elevar r al cuadrado se obtiene **a**.

$$\boldsymbol{\sqrt{a} = r} \quad \text{porque} \quad \boldsymbol{r^2 = a}$$

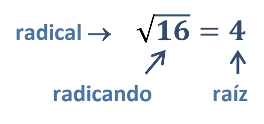
a** es el **radicando**, **r** es la **raíz

Fíjate en que si el **radicando** es **negativo no hay raíz**:

- $\sqrt{-64} = b \quad \boldsymbol{b^2 = -64}$ **no es posible,** porque b^2 es positivo y -64 es negativo

más…

Elementos de una raíz



Estos son los elementos principales de las raíces y el vocabulario que debemos conocer.

Es importante recordar que calcular una raíz es responder a la pregunta. ¿Qué número cumple que al elevarlo al cuadrado da como resultado **a**?.

En este caso tendremos la **raíz cuadrada** de a.

Ejemplo: 3 y -3 son las raíces cuadradas de 9

Si tenemos que elevar el número al **cubo**, **3**, hallaremos la **raíz cúbica**

Ejemplo: -4 es la raíz cúbica de -64 y 4 es la raíz cúbica de 64

Cálculo de raíces exactas

Solo los cuadrados perfectos tienen raíz cuadrada exacta. Lo primero que haremos si nos plantean una raíz cuadrada es buscar entre los cuadrado perfectos.

Ejemplos

● $\sqrt{576} = \pm 24$	$24^2 = 576 \quad (-24)^2 = 576$ *564 tiene dos raíces cuadradas, 24 y – 24*
● $\sqrt{-100}$	$10^2 = 100 \quad (-10)^2 = 100$ *no coinciden con –100* *–100 no tiene raíces cuadradas*
● $\sqrt{1024} = \pm 32$	$32^2 = 1024 \quad (-32)^2 = 1024$ *1024 tiene dos raíces cuadradas, 32 y –32*
● $\sqrt{-25}$	$5^2 = 25 \quad (-5)^2 = 25$ *no coinciden con –25* *–25 no tiene raíces cuadradas*

Cálculo de raíces enteras

En el caso de que la raíz que nos propongan no tenga un radicando que sea cuadrado perfecto podremos dar la raíz cuadrada por defecto o por exceso, encontrando los dos cuadrados perfectos entre los que se encuentra.

- *Por ejemplo para calcular* $\sqrt{\mathbf{112}}$*, primero buscamos entre qué cuadrados perfectos se encuentra el 112, vemos que 100 < 112 < 121. Luego la* ***raíz cuadrada*** *de* ***112*** *estará entre las raíces de* ***100*** *y* ***12****1. Como* $\sqrt{100} = 10$ *y* $\sqrt{100} = 11$ *, si tomamos sólo las raíces positivas, tendremos que* $\mathbf{10 < \sqrt{112} < 11}$
  - ***10*** *es la raíz por* ***defecto*** *de* $\sqrt{\mathbf{112}}$ *y su* ***resto*** *es* $112–10^2 = 12$
  - ***11*** *es la raíz por* ***exceso*** *de* $\sqrt{\mathbf{112}}$

En la siguiente actividad se calculan las raíces por defecto de unos cuantos números, se dejan para el lector el cálculo de las raíces por exceso y las raíces negativas.

Ejemplos

● $\sqrt{221} = 14$ $Resto = 25$	$14^2 = 196 \qquad 15^2 = 225$ $221 - 14^2 = 221 - 196 = 25$
● $\sqrt{102} = 10$ $Resto = 2$	$10^2 = 100 \qquad 11^2 = 121$ $102 - 10^2 = 102 - 100 = 2$
● $\sqrt{300} = 17$ $Resto = 11$	$17^2 = 289 \qquad 18^2 = 324$ $300 - 17^2 = 300 - 289 = 11$
● $\sqrt{1000} = 31$ $Resto = 39$	$31^2 = 961 \qquad 32^2 = 1024$ $1000 - 31^2 = 1000 - 961 = 39$

Ejercicios

1. *¿Qué números enteros están comprendidos entre -7 y 3?. ¿Cuáles son naturales?. ¿Y entre -13 y -5?. ¿Cuáles son naturales?.*

2. *Halla los siguientes valores absolutos:* |-1|; |-8|; |+13|; |-5+8|; |-3·(2·3 −5)|

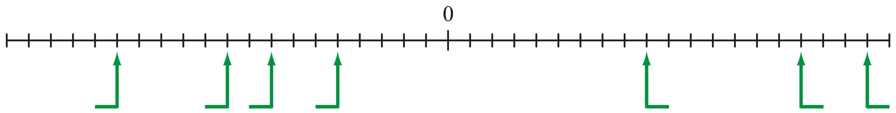
3. *Dados los números -7, 7, 4, 5, 1, -3:*

   a) Represéntalos gráficamente.

   b) Ordénalos de mayor a menor:

   c) ¿Cuál es el más lejano al origen?. ¿Y el más cercano?

   d) Determina los números enteros que aparecen señalados por las flechas



4. *Ordena de menor a mayor los números 12, -3, 6, 0, -2, 4, -5, -8, 3, 8, -4, -1, 10.*

5. *Da dos números enteros que tengan valor absoluto 5. En general, ¿Cómo son dos números que tienen el mismo valor absoluto?.*

6. *Realiza las siguientes operaciones:*

   a) 6 + 11 =
   b) −5 + 5 =
   c) 8 + (-5) =
   d) −4 + (-12) =
   e) −5 −12 =
   f) −7 + (4) =
   g) −2 + (-8) =
   h) 9 − (-4) =
   i) −7 + (-4) =
   j) -4 − (-1)=
   k) 6 + (-3)=
   l) -5 − (-2)=

7. *Rellena los huecos que quedan para que las igualdades sean ciertas:*

   a) −6 + ☐ =-9
   b) 5 + ☐ = 14
   c) ☐ + 4 = 4
   d) ☐ + 7= -12
   e) −5 + ☐ = 5
   f) 8 + ☐ = 0
   g) ☐ +(-3)=-9
   h) -5 + ☐ = -12
   i) ☐ + 3 = -8
   j) −2− ☐ =5
   k) 2+(-☐)=4
   l) -☐ −(-2)=6

8. *Realiza las siguientes operaciones:*

   a) -7 · 3 =
   b) 12 · (-5) =
   c) -11 · 11 =
   d) -4 · 8 =
   e) -1 · (-1) =
   f) 6 · 20 =
   g) -4 · (-5) =
   h) 6 · (-5) =
   i) −12 · 13 =
   j) -9 · (-10) =
   k) 3 · (7) =
   l) -7 · (-8) =

9. *Expresa como producto de dos números enteros de dos formas distintas:*

   a) 12 =
   b) 36 =
   c) -7 =
   d) -51 =
   e) 1 =
   f) 49 =
   g) -1 =
   h) -96 =

10. *Realiza las siguientes operaciones:*

   a) 10 : 2 =
   b) −6 : 6 =
   c) 34 : (-2) =
   d) −18 : (-3) =
   e) −75 : 5 =
   f) −200 : 10 =
   g) 45 : 5 =
   h) −18 : (-9) =
   i) 12 : (-3) =
   j) −5 : (-1)=
   k) 70 :(-2)=
   l) 27 : (-3)=

11. *Rellena los huecos que quedan para que las igualdades sean ciertas:*

a) 7· ☐ =-14

b) -16: ☐ = 8

c) 2· ☐ = 82

d) 8: ☐ = -4

e) -9· ☐ = -27

f) -12: ☐ = 2

g) 5· ☐ = -40

h) –25: ☐ = -5

i) -1· ☐ = -12

j) 100: ☐ = -10

k) -3· ☐ = 12

l) 45: ☐ = 9

12. *Realiza las siguientes operaciones comprobando la solución:*

a) $73 - 94 =$ *= -21*

b) $(+44) - (-15) =$ *= 59*

c) $(-58) - (-62) =$ *= 4*

d) $(+65) - (-49) =$ *= 114*

e) $287 - (+287) =$ *= 0*

f) $(-7) - (+\,9) =$ *= -16*

g) $-4 - 6 + 3 - (-6) =$ *= 1*

h) $-\,4 + (-8) - 3 + 4 =$ *= -9*

i) $-2 - \ (-4) + 10 + (-1) =$ *= 11*

j) $70 - (11 - 44) + (7 - 74) =$ *= 36*

k) $-(19 - 89 + 23) + (-71 + 44) =$ *= 20*

l) $42 : (-6) - 10 + (-27) : (-3) =$ *=-8*

m) $16 + [21 - (31 - 60)] =$ *= 66*

n) $16 - [21 - (31 - 60)] =$ *= -34*

o) $-22 - [39 - (24 - 44)] =$ *= -81*

p) $(-\,9) \cdot (-\,2) \cdot (+4) =$ *= 72*

q) $(-4) \cdot (-\,6) \cdot (-7) =$ *= -168*

r) $(-3) \cdot 8 \cdot (-20) =$ *= 480*

s) $-14 + 3 \cdot (-8) - 5 + 7 =$ *= -36*

u) $12 \cdot [42 + (-5)] =$ *= 444*

v) $(-\,5) \cdot 9 - 7 \cdot (-\,4) + 2 \cdot 6 =$ *= -5*

w) $-13 - (-\,3) \cdot (-\,9) + 5 \cdot (-\,8) =$ *= -80*

13. *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $2 - (9 \ + \ 6 - 14) \ =$

b) $3 - 7 \ + \ 21 - (16 \ + \ 9 - 4) \ + \ 10 =$

c) $9 - 15 \ + \ (4 - \ 6 - 8 - 16) \ + \ 9 =$

d) $4 - (-25 + 12) - 18 - 17 + 3 =$

e) $6 - (9 - 3) - 3 - (2 - 9) =$

f) $5 - [-2 - (-1 - (-8)) - 4] + 6 =$

g) $1 + [3 + (-8 - 5 - 1)] - 8 =$

h) $-3 + (-6)\cdot[-4-(1-3)+1] =$

i) $9 + 2 \cdot (7 - 11) =$

j) $36 - 75: (3 + 14 - 2) =$

k) $5 + 3 \cdot (-4) - (-1) =$

l) $-6 - (-7 + 9) : (3 - 4) =$

m) $3 \cdot 6 + 12 : (-4) - 4 =$

n) $24 \cdot (-5) : 2 : 15 =$

o) $-[-1 + (-2) - 3 + 18 : [5 + (-5) + 4 - 6 - (-8)] =$

p) $(-2 + 3 - 9) \cdot (-6 - (-6)] - 4 + 5 =$

q) $-8 : [-1 + (3 + (-2 - 8))] + (-10) =$

r) $(32 - 20) : (-5 + 9) =$

s) $-5 + (-6) \cdot [8 - 3 + (-1)] : (-2) =$

t) $18 : (-3) \cdot (-2) - [10 - (-8) + (-3)] =$

u) $3 \cdot 4 - 15 : [-14 - 4 \cdot (2 - 7) - 1] =$

v) $2 \cdot (5 - 12) - 4\,[6 + 2 \cdot (5 - 8 - 2)] =$

w) $3 - 4[1 - (6 : 2 - 11)] - 4 \cdot [5 - (7 - 3 + 8)] =$

x) $14 - 2 \cdot [4 - (5 - 4) - 2 \cdot 3] : (-2) =$

y) $[3 - (-3) - (-13 + 7)] : [2 - (5 - 9 + 6) - (-3)] =$

z) $-[-4 - (8 + 8 - 3) + 12] \cdot [3 - [-(9 - 4) + 1] - 4] =$

14. *Expresa en forma de potencia:*

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

b) $9 \cdot 9 \cdot 9 =$

c) $6 \cdot 6 =$

d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$

e) $(-11) \cdot (-11) \cdot (-11) =$

f) $-6 \cdot 6 \cdot 6 =$

g) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$

h) $7 \cdot (-7) \cdot 7 \cdot (-7) =$

i) $-(-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) =$

j) $8 \cdot 8 \cdot (-8) \cdot 8 =$

15. *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $(-4)^2 =$

b) $-4^2 =$

c) $-4^3 =$

d) $-(-4)^2 =$

e) $3 \cdot 4^3 =$

f) $(3 \cdot 4)^3 =$

g) $3^2 + 5^2 =$

h) $(3 + 5)^2 =$

i) $25 : (-5)^2 =$

j) $-5 + 4 : (-1)^3 =$

k) $-32 : 2 + 3^4 =$

l) $15 - (-3)^2 =$

m) $8 + (-2)^4 - (-2)^3 =$

n) $(-2)^3 - 5 \cdot (-3)^3 =$

o) $2 + (-3) \cdot 2^5 =$

p) $5 - (2 - 5)^3 =$

q) $(9 - 3)^2 + 3 \cdot (-7 + 4)^4 =$

r) $(-4 + 3)^3 - 64 : (-2)^4 =$

s) $[3 \cdot (-2)]^2 - 18 : (-3) =$

t) $5 + (-2)^5 + (3-4)^3 =$

16. *Utiliza las propiedades de las potencias para simplificar y expresa el resultado en forma de potencia*

a) $6^2 \cdot 6^3$

b) $4^3 \cdot 4^5 \cdot 4^0$

c) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$

d) $\dfrac{3^5}{3^3}$

e) $\dfrac{5^6}{5^4}$

f) $\dfrac{6^3}{6^2}$

g) $(2^4)^3$

f) $(5^3)^0$

h) $(5^3)^2$

i) $\dfrac{7^3 \cdot 7^2}{7^4}$

j) $\dfrac{(5^4 \cdot 5^2)^3}{(5^3)^3}$

k) $\dfrac{(3^3 \cdot 3^0 \cdot 3^4)^2}{(3 \cdot 3^2)^3}$

17. *Expresa matemáticamente los siguientes enunciados y calcula el resultado:*

a) Tengo 25 € y me regalan 15 €

b) La temperatura era de 10 °C y ha bajado 8 °C

c) En el banco tengo 560 € y han pagado un recibo de 720 €

d) El avión volaba a 3 200 m y ha ascendido 1 200 m y luego ha bajado 700 m

18. *El nivel del agua en un embalse ha descendido 20 cm diarios durante 5 días y seguidamente ha subido 15 cm durante 4 días. ¿Cuál ha sido la variación del nivel en los 9 días?*

19. *La temperatura más alta medida en el congelador de mi casa ha sido de 6 °C bajo cero y la más baja, de 20 °C bajo cero. ¿Cuál es la diferencia entre las temperaturas?*

20. *En un almacén tuvieron 5200 € de beneficio en el primer mes, perdieron 950 € en el segundo mes y ganaron 2500 € en el tercer mes. ¿Tuvieron ganancias o pérdidas durante el trimestre? ¿A cuánto ascendieron?*

21. *Una pequeña empresa ha obtenido los siguientes datos económicos durante los cuatro últimos trimestres:*

1^{er} trimestre: beneficio de 2625 €/mes

2° trimestre: pérdidas de 674 €/mes

3^{er} trimestre: pérdidas de 450 €/mes

4° trimestre: beneficio de 1100 €/mes

¿Cuál es el balance final?

Matemáticas y Tecnología 2º

Números racionales

2

En la primera unidad has trabajado con números enteros, positivos y negativos pero no todas las situaciones se resuelven con números enteros. Hay muchas ocasiones en la vida diaria en los que se utilizan los números fraccionarios, así cuando decimos: "Una cerveza de un tercio", "Un cuarto de litro de leche", "Tres cuartos de hora",...

Ya conoces las fracciones y sabes realizar operaciones sencillas con ellas, aquí se trata de recordar y reforzar ese conocimiento. Hasta ahora has utilizado fracciones de números positivos, ahora aprenderás a utilizar fracciones de números enteros y con ellas el concepto de número racional.

Es importante que manejes con soltura las operaciones combinadas y sepas resolver problemas en los que se apliquen las fracciones. Calcularás, además, potencias de fracciones y operaciones con potencias.

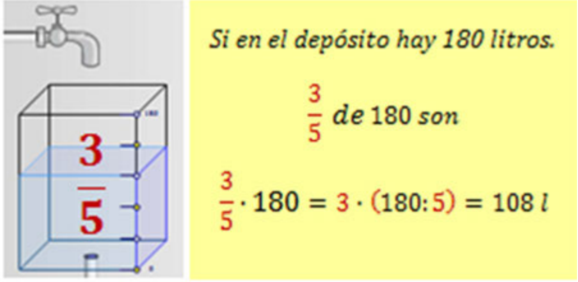
Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

- *Reconocer fracciones equivalentes.*
- *Simplificar fracciones y reducir a común denominador.*
- *Efectuar operaciones con fracciones.*
- *Calcular potencias de fracciones y efectuar operaciones con potencias.*
- *Expresar una fracción como número decimal y un número decimal exacto como una fracción.*
- *Utilizar las fracciones para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.*

1. Fracciones de números enteros

Una fracción es el resultado de dividir la unidad en partes. La fracción 3/5 significa que hemos dividido la unidad en 5 partes iguales y hemos tomado 3.

Una fracción también es un operador, que multiplica por a y divide por b. Los 3/5 de 180 litros son 108 litros.



Si en el depósito hay 180 litros.

$\frac{3}{5}$ de 180 son

$$\frac{3}{5} \cdot 180 = 3 \cdot (180:5) = 108\ l$$

Una fracción también representa el cociente entre dos números. Hasta ahora has manejado fracciones de números naturales, pero las divisiones de números enteros también se pueden escribir en forma de fracción, en la que el dividendo es el numerador y el divisor el denominador.

- Una **fracción a/b** es el cociente entre dos números enteros a y b, con b distinto de 0.

$$\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

a *es el* ***numerador***
b *es el* ***denominador***

Así el cociente entre -12 y 5 puede representarse mediante -12/5

Teniendo en cuenta las reglas de los signos para la división de enteros, es posible escribir las fracciones de números enteros como fracciones positivas o negativas de números naturales.

$$\frac{-12}{5} = -\frac{12}{5} \qquad \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \qquad \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

- Toda **fracción de números enteros** se puede escribir como una **fracción de números naturales**, que será **positiva** si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, y **negativa** si tienen signos diferentes.

1.1. Fracciones equivalentes

Decimos que dos **fracciones** son **equivalentes** si representan la misma cantidad.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{6}{8}$ *son equivalentes:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{4} &= 3:4 = 0{,}75 \\ \frac{6}{8} &= 6:8 = 0{,}75 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

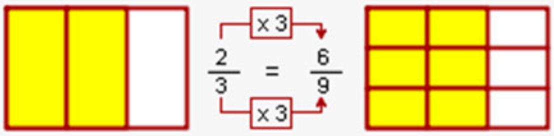
Las dos fracciones representan la misma cantidad, por tanto son **equivalentes**.

Obtención de fracciones equivalentes

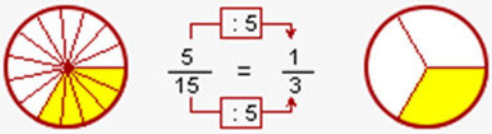
Si se multiplica o se divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, se obtiene una fracción equivalente a la dada.

Ejemplos

- $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{6}{9};\ \ por\ tanto\ \ \frac{2}{3}\ y\ \frac{6}{9}\ \ son\ equivalentes$



- $\frac{5}{15}=\frac{5:5}{15:5}=\frac{1}{3};\ \ por\ tanto\ \ \frac{5}{15}\ y\ \frac{1}{3}\ \ son\ equivalentes$



Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es obtener otra fracción equivalente **dividiendo** el numerador y el numerador por el mismo número.

- Si el numerador y el denominador de una fracción no tienen divisores comunes excepto el uno, no se puede simplificar, entonces decimos que es una **fracción irreducible**.

Ejemplo

- *Obtener la fracción irreducible equivalente a* $\frac{18}{24}$:

$$\frac{18}{24}=\frac{18:2}{24:2}=\frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$$

Si el número por el que dividimos es el **máximo común divisor** de los dos términos de la fracción obtenemos directamente la fracción irreducible.

más...

Regla práctica

Para reconocer fracciones equivalentes basta tener en cuenta que los productos de los términos cruzados son iguales.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\leftrightarrow \underbrace{3\cdot 8}_{24}=\underbrace{6\cdot 4}_{24}$$

M.C.D.

Recuerda que el **máximo común divisor** de dos números es el **mayor** de los **divisores** comunes a ambos.

Por ejemplo, 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son los divisores comunes de 48 y de 60, el mayor de ellos es 12, es M.C.D. de 48 y 60.

Para calcularlo, en primer lugar se descomponen los dos números en factores primos y se toman los factores **comunes** elevados al menor exponente.

48 = 2^4·3 60 = 2^2· 3 · 5

M.C.D. (48,60) = 2^2·3 = 12

Practica

1) *Obtén la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones:*

a) $\frac{12}{27}$ **e)** $\frac{12}{42}$

b) $\frac{15}{25}$ **f)** $\frac{252}{108}$

c) $\frac{20}{32}$ **g)** $\frac{48}{120}$

d) $\frac{13}{15}$ **h)** $\frac{25}{100}$

Comprueba

1. *a) 4/9*
b) 3/5
c) 5/8
d) Es irreducible
e) 2/7
f) 7/3
g) 2/5
h) 1/4

1.2. Reducción a común denominador

Cuando queremos comparar o sumar fracciones si tienen el mismo denominador nos resulta muy fácil. Pero si tienen distinto denominador no es tan sencillo, en este caso el mejor procedimiento es reducir a común denominador.

- **Reducir a común denominador** consiste en sustituir las fracciones dadas por otras equivalente con el mismo denominador.

Para hacerlo:

- Elegimos como común denominador el **mínimo común múltiplo** de todos los denominadores.
- Se buscan las fracciones equivalentes a las dadas con el denominador común.

más…

m.c.m

Recuerda que el **mínimo común múltiplo** de dos números es el **menor** de los **múltiplos** comunes a ambos.

Para calcularlo, en primer lugar se descomponen los dos números en factores primos y se toman **todos** los factores elevados al **mayor** exponente.

$48 = 2^4 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.m.$(48,60) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

Ejemplos

- *Reduce a común denominador las fracciones* $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}$ *y* $\frac{1}{3}$

Se calcula el m.c.m. de los denominadores:	m.c.m. (5, 6, 3) = 30
Buscamos las fracciones equivalentes, multiplicando cada numerador por el mismo número por el que se multiplica el denominador:	$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}$ $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$ $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}$

- *Ordena de menor a mayor las fracciones* $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ *y* $\frac{3}{4}$

Se calcula el m.c.m. de los denominadores	m.c.m. (3, 6, 4) = 12
Se buscan las fracciones equivalentes a las dadas con denominador 12.	$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$
Se ordenan las fracciones, teniendo en cuenta que será más pequeña la de menor numerador.	$\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12} \rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

Comprueba

1. a) 1/5<1/2<7/8

b) 1/4<4/9<1/2

c) 1/3<1/2<4/5

Practica

2) *Ordena de menor a mayor las fracciones:*

a) $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$

2. Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Para **sumar o restar fracciones** las reducimos primero a común denominador y después realizamos las operaciones.

Ejemplos

- $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}+\frac{1}{2} \rightarrow m.c.m.(6,9,2)=18$

  [18 : 6 = 3] [18 : 9 = 2] [18 : 2 = 9]

  $$\frac{5}{6}-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}-\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}+\frac{1\cdot 9}{2\cdot 9}=\frac{15}{18}-\frac{8}{18}+\frac{9}{18}=$$

  $$=\frac{7}{18}+\frac{9}{18}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$$

  Recuerda que siempre que se pueda hay que simplificar.

- $\frac{9}{4}-\underline{\left(3-\frac{7}{6}\right)}=\frac{9}{4}-\frac{11}{6}=\frac{9\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{11\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{27}{12}-\frac{22}{12}=\frac{5}{12}$

  $\downarrow$

  $$\boxed{3-\frac{7}{6}}=\frac{3}{1}-\frac{7}{6}=\frac{3\cdot 6}{1\cdot 6}-\frac{7}{6}=\frac{18}{6}-\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

  Realizamos primero el paréntesis: m.c.m .(1, 6) = 6 Sustituimos en la operación inicial el paréntesis por el valor obtenido y operamos: m.c.m.(4, 6) = 12

Practica ahora con unos cuantos ejercicios, en primer lugar tienes unos más sencillos y luego otros con sumas y restas combinadas y paréntesis. Recuerda que si en una expresión de operaciones con fracciones aparece un número entero, como en el segundo ejemplo de encima, se considera como una fracción de denominador 1.

más…

Fracciones opuestas

Dos fracciones son opuestas cuando suman cero.

Toda fracción $\frac{a}{b}$ tiene una opuesta, $\frac{-a}{b}$ ó bien $\frac{a}{-b}$

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=0$$

Practica

3) *Calcula y simplifica:*

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$

b) $2+\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{7}{8}$

e) $\frac{1}{4}+3$

f) $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$

4) *Calcula y simplifica:*

a) $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{8}{7}-\frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{7}{9}+1+\frac{3}{4}$

c) $4-\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{2}\right)$

d) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$

e) $\frac{4}{3}-\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)$

f) $\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)$

Comprueba

2. *a)13/15*
b) 5/2
c) 1/10
d) 11/8
e) 13/4
f) 3/10

3. *a) 1/6*
b) 91/36
c) 31/14
d) 2
e) 7/12
f) 13/90

Producto de fracciones

El **producto de dos fracciones** es otra fracción que tiene por denominador el producto de los denominadores y como denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos

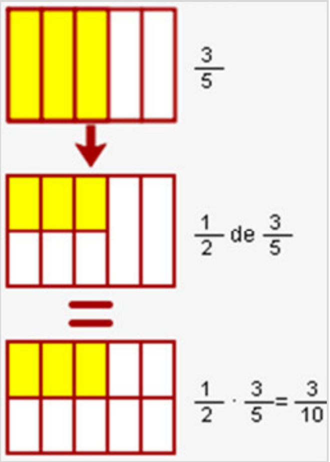
● $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$	*Recuerda que hay que simplificar siempre que se pueda.*
● $\frac{2}{3}\cdot(-2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-2}{1}=\frac{2\cdot(-2)}{3\cdot 1}=\frac{-4}{3}$	*Como en la suma si aparece un número entero lo consideramos como una fracción de denominador 1.*

Recuerda que para calcular la fracción de un número se multiplica dicho número por el numerador y se divide por el denominador, es decir, las mismas operaciones que para multiplicar una fracción por un número entero.

$$\frac{3}{5}\ de\ 15=\frac{3}{5}\cdot 15=\frac{3\cdot 15}{5\cdot 1}=9$$

Del mismo modo una fracción de otra fracción es igual al producto de ambas fracciones.

$$\frac{3}{4}\ de\ \frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$



Fracción inversa

Dos **fracciones** son **inversas** si su producto es la unidad.

- La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$

Ejemplos

- La fracción inversa de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$ porque $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2\cdot 5}{5\cdot 2}=\frac{10}{10}=1$
- La fracción inversa de 4 es $\frac{1}{4}$ porque $4\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{4}{4}=1$

División de fracciones

El **cociente de dos fracciones** es otra fracción que se obtiene al multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplos

- $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$
- $\frac{3}{4}:(-2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{-2}=\frac{3}{-8}=-\frac{3}{8}$

Practica

5) *Calcula y simplifica:*

a) $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{3}:\frac{-5}{9}$

c) $\frac{-5}{6}\cdot 8$

d) $\frac{7}{6}:\frac{1}{3}$

e) $\frac{-1}{2}\cdot\frac{-8}{9}$

f) $\frac{5}{4}:5$

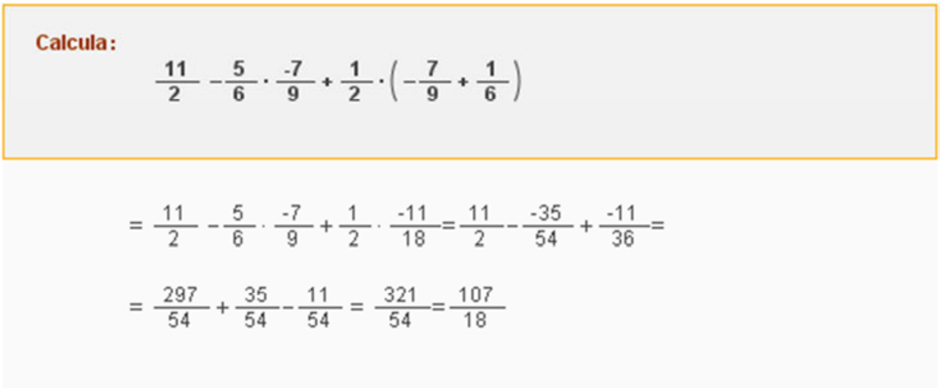
g) $\frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{2}$

h) $\frac{5}{6}:\frac{7}{6}$

Operaciones combinadas

Lo mismo que ocurre con el resto de los números, si en una expresión con fracciones aparecen distintas operaciones las resolveremos siguiendo la siguiente prioridad: primero los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones, y por último, las sumas y restas.

Ejemplo



Calcula:

$$\frac{11}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{-7}{9}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{9}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{11}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{-7}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-11}{18}=\frac{11}{2}-\frac{-35}{54}+\frac{-11}{36}=$$

$$=\frac{297}{54}+\frac{35}{54}-\frac{11}{54}=\frac{321}{54}=\frac{107}{18}$$

Practica

6) *Calcula y simplifica:*

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{7}{4}+2\cdot\frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{8}\right)$

d) $1-\frac{5}{3}:\frac{9}{5}$

e) $2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$

f) $\left(\frac{5}{9}+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)$

g) $\frac{6}{7}\cdot\left(4-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$

h) $\frac{3}{8}-\frac{11}{2}\cdot\frac{-5}{6}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{-5}{6}+\frac{1}{2}\right)$

Comprueba

4. *a) 1/7*
b) -3
c) -20/3
d) 7/2
e) 4/9
f) 1/4
g) -2/5
h) 5/7

5. *a) 616/15*
b) 59/20
c) 67/32
d) 2/27
e) 1/10
f) 682/2205
g) 191/28
h) 39/8

2.1. Potencias

Para **elevar una fracción a una potencia** se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos

- $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$
- $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$
- $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Como puedes ver en los siguientes ejemplos, las potencias de fracciones cumplen las mismas propiedades que ya conoces para números enteros.

Ejemplos

• $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$	*Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.*
• $\left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^{6-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$	*Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.*
• $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\cdot 5} = \left(\frac{4}{7}\right)^{10}$	*Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.*

Comprueba

7. *a)* $(6/7)^{17}$

b) 19/11

c) $(4/3)^{48}$

d) $(2/9)^{32}$

Practica

7) *Simplifica las siguientes expresiones dando el resultado como potencia de una fracción:*

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^{11} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 : \left(\frac{6}{7}\right)^3$

b) $\left(\frac{8}{11} + 1\right)^3 : \left(\frac{19}{11}\right)^2$

c) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{10} : \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^6$

d) $\left[\left(1 - \frac{7}{9}\right)^4\right]^8$

3. Números Racionales

Los **números racionales** son los que se pueden poner en forma de fracción:

$$\textit{Número Racional} = \frac{\textit{Número entero}}{\textit{Número entero}}$$

El conjunto de los números racionales se designa por la letra **Q**.

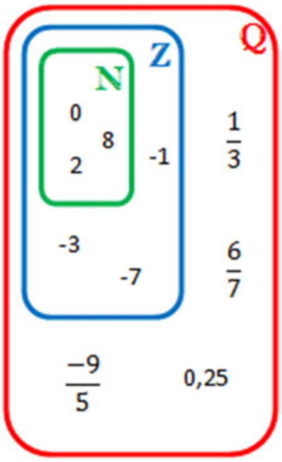
Las fracciones equivalentes y su expresión como número decimal (obtenido al dividir el numerador por el denominador), representan el mismo número racional.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

Todos los **números enteros**, y por tanto los **naturales, son** también **racionales**. Se pueden representar en forma de fracción de varias formas.

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \cdots$$

$$-2 = \frac{-4}{2} = -\frac{10}{5} = \cdots$$



Ya sabemos expresar toda fracción como un número decimal o entero simplemente realizando la división. También hemos visto que todo número entero se puede expresar como fracción. Pero, ¿ocurre lo mismo con los decimales?.

- **¿Todo número decimal se puede expresar en forma de fracción?**

Los números decimales pueden ser de tres tipos: decimales exactos, decimales periódicos y decimales con infinitas cifras decimales no periódicas.

Vamos a contestar a la pregunta anterior para cada caso.

Números decimales

- **Decimales exactos**. Son los que tienen un número finito de cifras decimales.

  Podemos transformarlos en forma de fracción quitándoles la coma y dividiendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hemos suprimido. Por ejemplo:

  $$2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \qquad 1{,}23 = \frac{123}{100} \qquad 0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$

  Como cualquier decimal exacto se puede poner en forma de fracción, **los decimales exactos son números racionales**.

- **Decimales periódicos**. Son los que tienen infinitas cifras decimales que se repiten.

  Utilizando diferentes técnicas, que aprenderás en cursos posteriores, podemos transformar en fracción cualquier decimal periódico.

  $$1,\hat{2} = 1{,}222\ldots = \frac{11}{9} \qquad 0{,}2\hat{6} = 0{,}2666\ldots = \frac{4}{15}$$

  Por tanto, **los decimales periódicos son números racionales**.

- **Decimales con infinitas cifras decimales no periódicas**.

  Estos números no se pueden expresar en forma de fracción. Algunos ejemplos de este tipo de números son:

  $$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots \qquad \pi = 3{,}141592\ldots$$

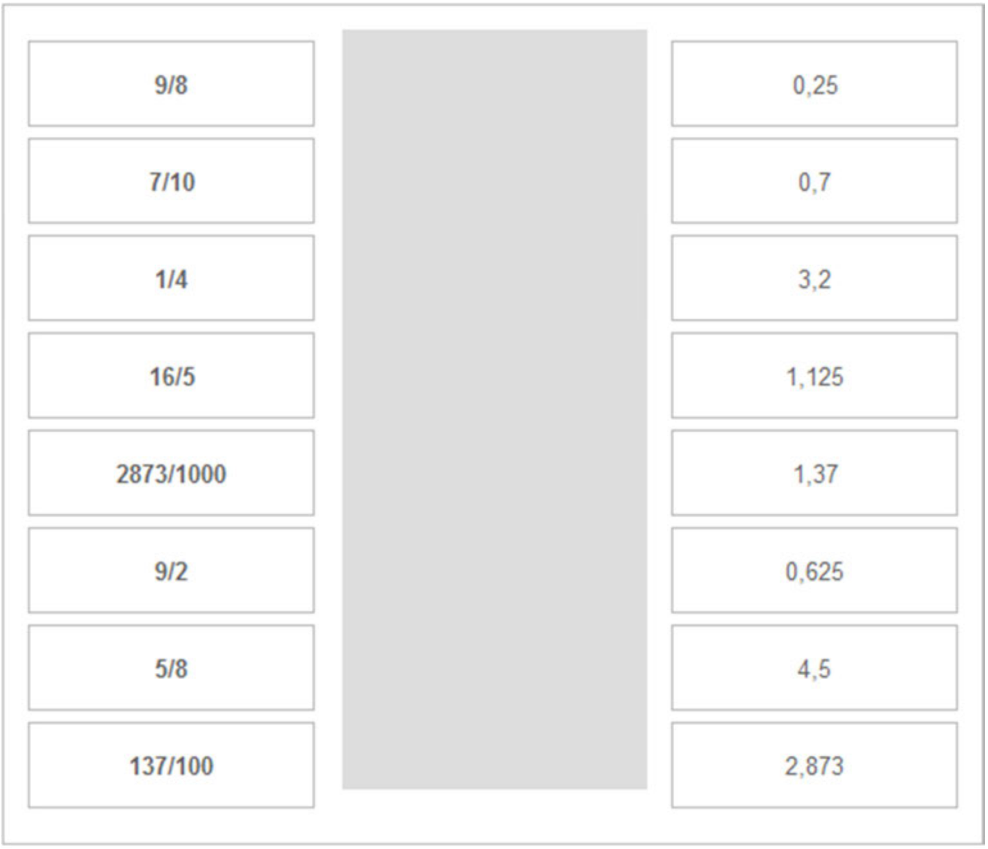
  Es decir, **estos números no son racionales**.

Resumiendo:

- Son números racionales: los enteros, y por tanto los naturales, los decimales exactos y los decimales periódicos.
- No son números racionales los decimales con infinitas cifras no periódicas.

Relaciona

Relaciona cada fracción con el número decimal equivalente:



9/8		0,25
7/10		0,7
1/4		3,2
16/5		1,125
2873/1000		1,37
9/2		0,625
5/8		4,5
137/100		2,873

4. Problemas con fracciones

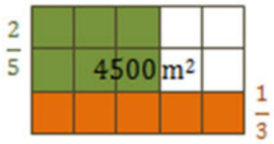
Hay muchos problemas en los que intervienen fracciones. A continuación tienes una serie de ejercicios resueltos a modo de ejemplo.

Suma y resta de fracciones

1) Un agricultor ha sembrado las 2/5 partes de un campo de trigo y 1/3 de cebada. Si el campo tiene 4500 m², ¿qué superficie queda sin sembrar?.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}\ \text{están sembrados}$$

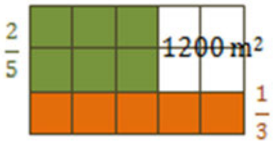
$$\text{Quedan}\ \frac{4}{15},\qquad \frac{4}{15}\cdot 4500=\frac{4\cdot 4500}{15}=1200\ m^2$$



2) Un agricultor ha sembrado las 2/5 partes de un campo de trigo y 1/3 de cebada. Si aún quedan 1200 m² sin sembrar, ¿qué superficie tiene el campo?.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}\ \text{están sembrados}$$

$$\text{Quedan}\ \frac{4}{15}\ \text{que son}\ 1200\ m^2;\ \text{Total}=\frac{15\cdot 1200}{4}=4500\ m^2$$



Producto y cociente de fracciones

3) En el envase de litro y medio de un suavizante para la ropa dice que con un tapón por lavado hay para 54 lavados. a) ¿Qué fracción de litro cabe en cada tapón?. b) ¿Cuántos litros harían falta si fuese para 90 lavados?

a) $1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} : 54 = \frac{3}{2 \cdot 54} = \frac{1}{36}$ *de litro en cada tapón*

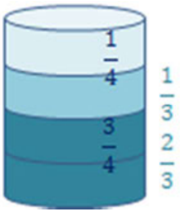
b) $90 \cdot \frac{1}{36} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ *litros*

Fracción de otra fracción

4) De un depósito que contenía 6300 litros de agua se ha sacado la cuarta parte y después 1/3 de lo que quedaba. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?.

	Se sacan	Quedan
En primer lugar	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
En segundo lugar	$\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ de $6300 = 3150$ *litros*

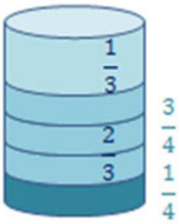


5) De un depósito de agua se ha sacado la tercera parte y después los 3/4 de lo que quedaba. Si aún sobran 1050 litros, ¿cuántos litros había en el depósito?.

	Se sacan	Quedan
En primer lugar	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
En segundo lugar	$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$ *son 1050 litros*

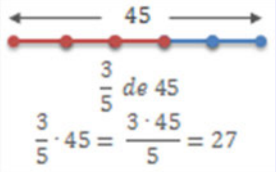
$1050 \cdot 6 = 6300$ *litros había*



más...

Recuerda

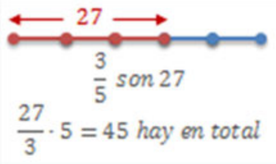
Para calcular la fracción de una cantidad se multiplica la fracción por la cantidad.



$\frac{3}{5}$ *de* 45

$\frac{3}{5} \cdot 45 = \frac{3 \cdot 45}{5} = 27$

Y si se conoce la fracción y se quiere calcular la cantidad se procede al revés.



$\frac{3}{5}$ *son* 27

$\frac{27}{3} \cdot 5 = 45$ *hay en total*

Practica

8) Un tren ha recorrido 9/11 partes de su trayecto, quedando 40 km. ¿Cuántos km tiene el trayecto?

9) Una mezcla de 300 g de macedonia de frutas está compuesta por 1/5 de manzana, 1/3 de plátano y el resto de naranja. ¿Qué fracción hay de naranja? ¿Cuántos g de cada fruta hay?

10) Un hombre soltero deja al morir, en su testamento 4/9 partes de la herencia a una institución benéfica y el resto a repartir en partes iguales entre sus 3 sobrinos. Si la herencia ascendía a 80100 €, ¿cuánto corresponde a cada sobrino?

11) Un agricultor dedica las 9/11 partes de un campo a trigo, y 4/5 del resto a maíz. Si aún quedan 20 Ha para hortalizas. ¿Cuál es la superficie del campo?

12) En un pueblo se ha celebrado un referéndum y 5/7 ha votado a favor de la propuesta, 1/8 ha votado en contra, y el resto, que son 180, se ha abstenido. ¿Cuántos votantes hay en ese pueblo?

13) Gasto 4/7 del dinero que tengo en una cuenta, luego ingreso 2/3 de lo que queda, pero aún me faltan 276 € para tener el saldo inicial. ¿Cuánto tenía?

14) Una familia destina 2/5 de su presupuesto mensual a gastos de vivienda y 1/4 de lo que queda a alimentación, sobran 220 € para otros gastos. ¿A cuánto ascendía el presupuesto?.

Comprueba

__8)__ 220 km

__9)__ 7/15 de naranja
Manzana: 60 g
Plátano: 100 g
Naranja: 140 g

__10)__ 14833,33 €

__11)__ 550 Ha

__12)__ 1120 votantes

__13)__ 966 €

__14)__ 880 €

Ejercicios

1. *Calcula y simplifica el resultado si es posible:*

a) $\left(\frac{4}{5}-1\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

b) $-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{6}:4-\frac{6}{4}\cdot 3-\frac{2}{5}:2$

d) $\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{2}\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)-2\right]$

e) $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\right)$

f) $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\right):\frac{5}{28}$

g) $\left(\frac{2}{3}+4\right)\cdot\frac{1}{7}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-2\right)$

h) $\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{7}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}-2$

i) $\frac{1}{3}:\frac{4}{5}-\frac{1}{4}\cdot\left(3-\frac{1}{5}\right)$

j) $\left(\frac{1}{3}:\frac{4}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot 3-\frac{1}{5}$

k) $\frac{3}{4}-\frac{7}{8}\cdot\left[\frac{5}{3}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]$

l) $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\cdot\left[\frac{4}{3}-8\cdot\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{16}\right)\right]$

2. *Escribe las fracciones como decimales y los decimales como fracciones irreducibles:*

a) 43/21 b) −23/4 c) 70/16

d) −6,54 e) 54,6 f) 6,545

3. *Expresa como una única potencia:*

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

b) $\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^4:\left(-\frac{5}{6}\right)^2\right]^3$

c) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^5\right]^3:\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^5$

d) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]:\left(-\frac{2}{5}\right)^5$

e) $\left(-\frac{5}{3}\right)^8:\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right]$

f) $\left(-\frac{3}{7}\right)^4:\left[\left(-\frac{3}{7}\right)^7:\left(-\frac{3}{7}\right)^3\right]$

4. *Necesito 120 pasos para avanzar 100 metros. ¿Qué fracción de metro avanzo con cada paso?, ¿cuántos pasos daré si recorro 450 m?, ¿cuántos metros he recorrido si he dado 720 pasos?.*

5. *Durante un apagón de luz se consumen las 3/5 partes de una vela. Si el cabo restante mide 8 cm, ¿cuánto medía la vela?.*

6. *Una empresa comercializa jabón líquido en envases de plástico con una capacidad de 2/5 de litro. ¿Cuántos litros de jabón se necesitan para llenar 100 envases?. ¿Cuántos envases se pueden llenar con 100 litros de jabón?.*

7. *Una familia gasta 2/5 de su presupuesto en vivienda y 1/3 en comida. Cubiertos éstos, aún quedan 600 € para otros gastos. ¿Cuál era su presupuesto?*

8. *La tercera parte de los 240 viajeros de un avión son europeos, 2/5 son africanos y el resto americanos. ¿Cuántos americanos viajan en el avión?.*

9. *De un bidón de aceite se vacía la mitad, se vacía después la tercera parte del resto. Si todavía quedan 32 litros, ¿cuántos litros había al principio?.*

10. *Un granjero tiene a finales de mayo unas reservas de 2800 kg de pienso para el ganado. En junio gasta 3/7 de las existencias y en julio, 3/4 de lo que le quedaba. ¿Cuántos kilos de pienso tiene a principios de agosto?.*

Proporcionalidad

3

En esta unidad vamos a estudiar una relación muy común entre dos magnitudes: la relación de proporcionalidad. Esta se distingue en dos modalidades la proporcionalidad directa y la inversa. En general, una vez entendido este tema, nuestro objetivo será resolver problemas donde dándonos tres datos seamos capaces de calcular el resultado que sea proporcional a los tres anteriores.

Tendremos que tener en cuenta que las propiedades y técnicas que utilizaremos sólo se pueden usar para resolver problemas entre magnitudes proporcionales. Existen muchas magnitudes que no lo son, así, tendremos que aprender a distinguirlas.

Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

- *Expresar razones, formar proporciones, conocer la constante de proporcionalidad y calcular el cuarto proporcional.*
- *Distinguir magnitudes proporcionales (directas e inversas) y magnitudes no proporcionales.*
- *Resolver problemas entre magnitudes proporcionales usando sus propiedades.*
- *Mecanizar ejercicios de cálculo de porcentajes, aumentos y disminuciones porcentuales, tasas y repartos proporcionales.*

1. Magnitudes, razón y proporción

En esta unidad vamos a estudiar la relación entre magnitudes, entendemos por **magnitud** todo aquello que se puede medir.

Si te fijas, siempre se representan por un número y van seguidas de la unidad en que se han medido. Por ejemplo, la longitud de una cuerda en metros, la superficie de un cristal en metros cuadrados, la temperatura de una habitación en grados centígrados, el dinero que cuesta un apartamento en euros, la velocidad a la que va un coche en kilómetros por hora, etc.

Longitud en cm

Temperatura en ºC

Velocidad en Km/h

Dinero en libras

En ocasiones nos interesa dar la relación entre dos magnitudes, a esta relación que es la división entre ambas, se le denomina **razón**.

Veámoslo en un **ejemplo**, si en una reunión hay 20 personas de las que 5 son hombres, relacionamos estas dos magnitudes de forma que decimos 5/20; así, hay 5 hombres de cada 20 personas.

Muchas veces nos interesa nombrarlo con relación a 100 (por ser un número con muchos divisores y que conocemos bien) y decimos 20 de cada 100 personas son hombres, el *20%*. Observa que hemos usado la igualdad 5/20 = 20/100, a esta igualdad entre dos razones se le denomina **proporción**. Hay veces que la proporción que nos interesa es con la menor relación entera: 5/20 = 1/5 y decimos una quinta parte de las personas de la reunión son hombres (o bien, 1 de cada 5 personas son hombres).

En los apartados siguientes estudiaremos con más detalle las razones y las proporciones.

1.1. Razón

Cuando queremos dar una relación entre dos números o magnitudes (x e y por ejemplo) lo hacemos mediante una razón.

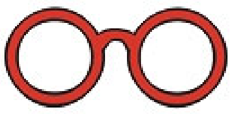
Razón es el cociente $\frac{x}{y}$

Se lee x es a y
A ***x*** se le llama antecedente
A ***y*** se le llama consecuente

Al efectuar la división su resultado indica las veces que x es mayor que y.

Observa que es similar a las fracciones que ya has estudiado, la única diferencia es que el antecedente ("numerador") y el consiguiente ("denominador") no tienen que ser números enteros como era necesario en las fracciones. Aquí, el antecedente y consiguiente podrá ser cualquier número ya que quieren representar magnitudes y éstas, en general, pueden contener decimales.

Ejemplos



- En una clase hay 20 personas que no llevan gafas y 10 que sí.
  - Diremos que la razón entre las personas sin gafas y con gafas es de:

    $\frac{20}{10} = 2$ Hay el doble de personas que no llevan gafas.

  Fíjate que también lo podemos comparar al revés.
  - Diremos que la razón entre las personas con gafas y sin gafas es de

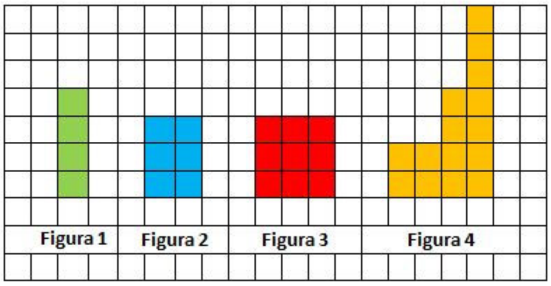
    $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ Por cada persona que lleva gafas hay dos que no llevan.

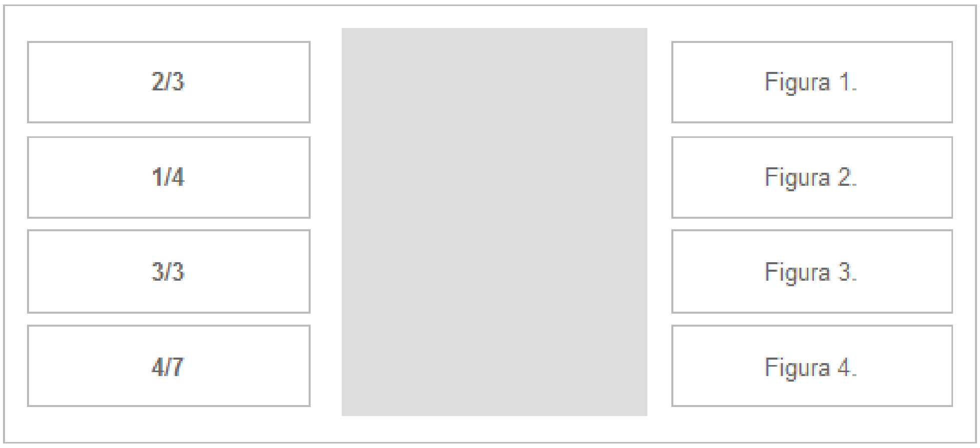
- En un pastel usamos 5 kg de harina y 2 kg de azúcar.
  - Diremos que la razón entre la harina y el azúcar es $\frac{5}{2} = 2{,}5$

    Por cada kilo de azúcar echaremos 2,5 kilos de harina.

Relaciona

Relaciona la razón entre la base y la altura de las figuras siguientes





2/3
1/4
3/3
4/7

Figura 1.
Figura 2.
Figura 3.
Figura 4.

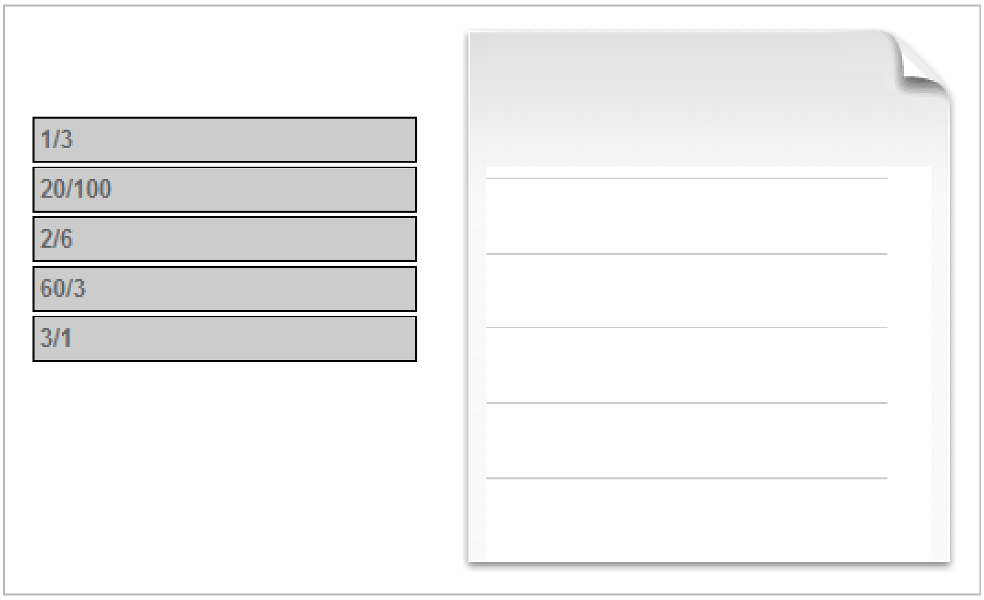
Elige la correcta

En un Ayuntamiento de 1750 habitantes hay 12 empleados municipales, ¿cuál es la razón entre el número de habitantes y empleados?

12/1750 ○
120/175 ○
1750/12 ○

Elige las correctas

María dedica veinte minutos a desplazarse en autobús por la ciudad y una hora andando. ¿Cuál de las siguientes razones compara ambos tiempos?



1/3

20/100

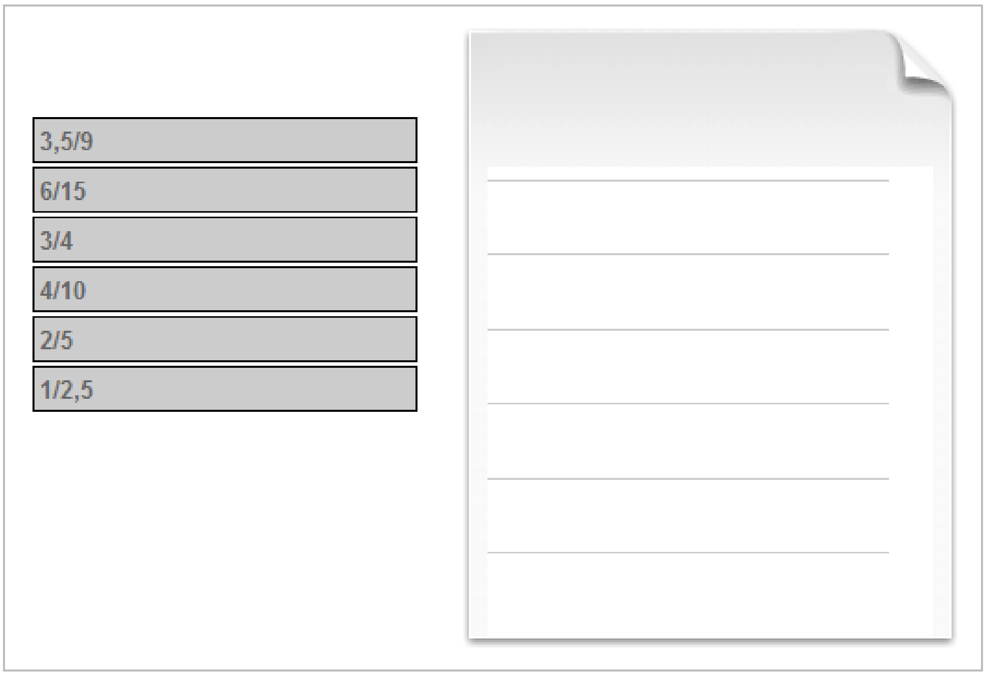
2/6

60/3

3/1

Elige las correctas

De las siguientes razones elige las equivalentes a 12/30



3,5/9

6/15

3/4

4/10

2/5

1/2,5

1.2. Proporción. Calculo del cuarto proporcional.

Llamaremos proporción a una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se lee ***a*** es a ***b*** como ***c*** es a ***d***.
a, **b**, **c**, **d**, se les llaman **términos**.
a y **d** se llaman **extremos**.
b y **c** se llaman **medios**.

Observa que es similar a las "fracciones equivalentes" que ya has estudiado pero con a, b, c y d no necesariamente enteros.

- Si hacemos la división de las dos proporciones resulta el mismo número y se denomina **constante de proporcionalidad**.

Las proporciones cumplen la siguiente **propiedad**:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

El producto de medios es igual al producto de extremos*.

más...

Para saber más...

* Esta propiedad no es ningún milagro... puedes comprobar que siempre es cierto en cualquier proporción.

Más adelante cuando estudies la parte correspondiente al Álgebra verás que la propiedad no es más que una ecuación equivalente a:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

Se obtiene al realizar la misma operación en los dos miembros (multiplicar por b·d) y simplificar.

OBSERVA:

Para saber si dos razones están en proporción bastará:

- que tengan la misma constante de proporcionalidad.
- que el producto de medios sea igual al producto de extremos.

Si cuatro números están en proporción, se pueden escribir de varias formas formando proporción todas ellas:

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6} \leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{9} \leftrightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2} \leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{2}{6}$$

Ejemplos

- *En dos pueblos se ha gastado en una semana el agua que se adjunta en la tabla:*

	Número habitantes	*Consumo agua*
Chía	100	50 m^3
Eriste	160	100 m^3

La razón del consumo de agua por habitante para la población de Chía es de:
50/100 = 1/2. Consumen 1m³ de agua por cada 2 habitantes.
La razón del consumo de agua por habitante para la población de Eriste es de:
100/160 = 1/1,6. Consumen 1m³ de agua por cada 1,6 habitantes; gastando menos agua por habitante que en Chía.
Observa que las razones que se obtienen son distintas luego no forman proporción y no verifican la propiedad a·d = c·b, así vemos que: 100 · 100 distinto de 160 · 50.

- *En un partido de Baloncesto Javier ha encestado 4 triples de 10 intentos y Pablo 6 de 15 intentos, ¿quién ha tenido mejor puntería?.*

La razón de tiros encestados con respecto a los intentos realizados es:

$$\text{Javier: } \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \text{Pablo } \frac{6}{15} = 0{,}4$$

Tienen la misma constante de proporcionalidad, así, tienen igual puntería. También forman la proporción:

$$\frac{4}{10} = \frac{6}{15} = 0{,}4 \Rightarrow 4 \cdot 15 = 6 \cdot 10 = 60$$

cumpliendo: a·d = c·b = constante.

Cálculo del cuarto proporcional.

Utilizando la propiedad de que el producto de medios es igual al producto de extremos en una proporción podremos calcular un término desconocido de ella (**el cuarto proporciona**l, **x**) que esté en proporción con los otros tres términos conocidos.

Observa su resolución, en los cuatro casos posibles, según dónde se encuentre el valor desconocido, **x**, en la proporción. Primero aplicamos la propiedad de producto de medios igual a producto de extremos y, después, lo que acompaña a la **x** multiplicando lo pasamos al otro lado de la igualdad dividiendo.

$$\frac{x}{5}=\frac{15}{10} \leftrightarrow x\cdot 10=5\cdot 15 \leftrightarrow x=\frac{15\cdot 5}{10}=7{,}5$$

$$\frac{12}{x}=\frac{5}{10} \leftrightarrow 12\cdot 10=5\cdot x \leftrightarrow x=\frac{12\cdot 10}{5}=24$$

$$\frac{6}{5}=\frac{x}{10} \leftrightarrow 6\cdot 10=x\cdot 5 \leftrightarrow x=\frac{6\cdot 10}{5}=12$$

$$\frac{4}{3}=\frac{15}{x} \leftrightarrow 4\cdot x=15\cdot 3 \leftrightarrow x=\frac{15\cdot 3}{4}=11{,}25$$

más...

Para saber más...

La **media proporcional**, es el valor de **x** que cumple:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x}}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{4}{x}=\frac{x}{16} \Leftrightarrow x\cdot x=4\cdot 16$$
$$x^2=64 \Leftrightarrow x=\pm 8$$

Practica

1) *Calcula el cuarto proporcional:*

a) $\frac{x}{3}=\frac{16}{4}$

b) $\frac{x}{13{,}5}=\frac{16}{24}$

c) $\frac{12}{x}=\frac{16}{64}$

d) $\frac{4}{20}=\frac{x}{80}$

e) $\frac{7}{14}=\frac{16}{x}$

f) $\frac{3}{x}=\frac{16}{80}$

Comprueba

1. *a) x = 4*

b) x = 9

c) x = 48

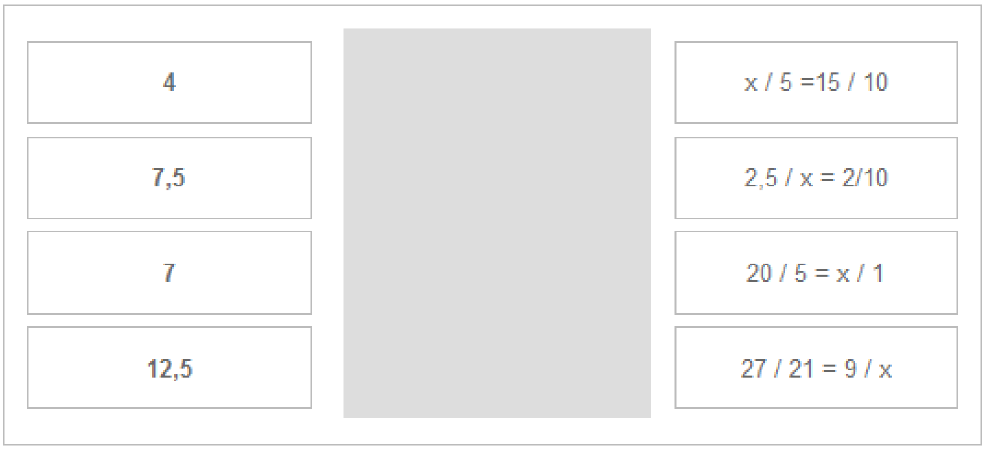
d) x = 16

e) x = 32

f) x = 15

Relaciona

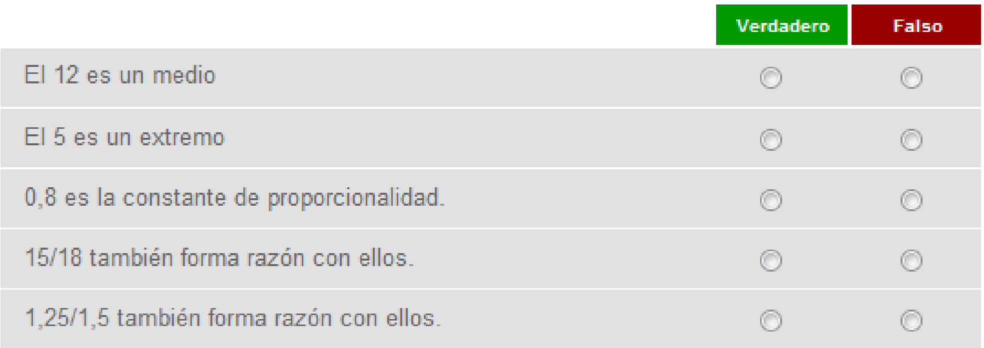
Relaciona el contenido de la x (el cuarto proporcional) con cada proporción.



4	x / 5 =15 / 10
7,5	2,5 / x = 2/10
7	20 / 5 = x / 1
12,5	27 / 21 = 9 / x

Verdadero o falso

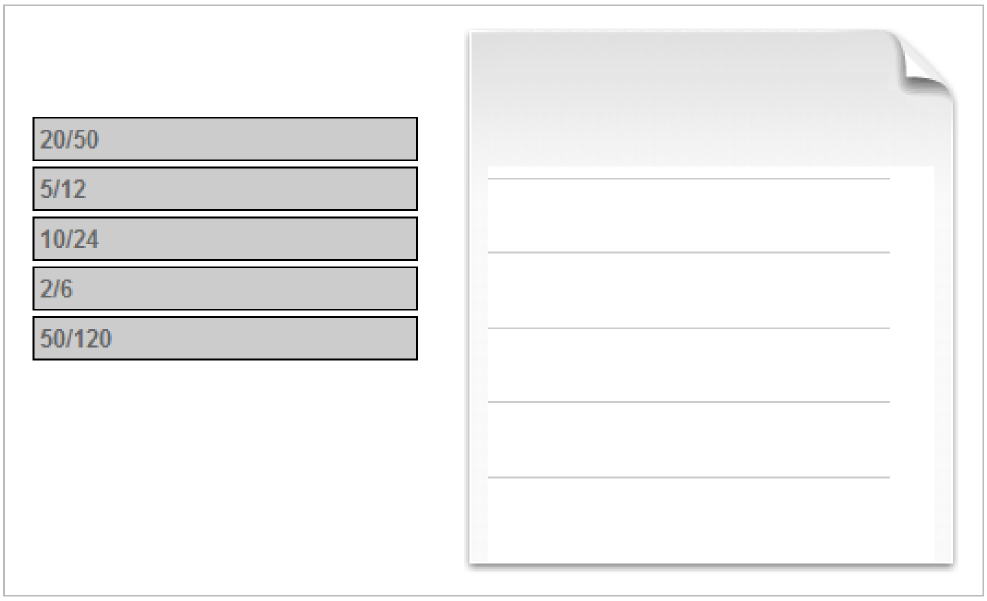
Dada la proporción 10/12 = 5/6, pon si las siguientes frases son verdaderas o falsas



	Verdadero	Falso
El 12 es un medio	○	○
El 5 es un extremo	○	○
0,8 es la constante de proporcionalidad.	○	○
15/18 también forma razón con ellos.	○	○
1,25/1,5 también forma razón con ellos.	○	○

Elige las correctas

De entre las siguientes razones señala las que forman proporción entre sí



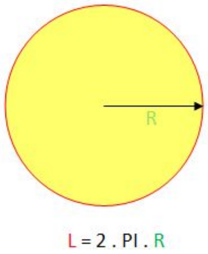
20/50
5/12
10/24
2/6
50/120

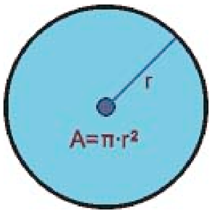
2. Estudio de las relaciones básicas entre magnitudes

Ya hemos visto en el punto anterior qué es una **magnitud** y la relación entre dos magnitudes mediante una **razón** o una **proporción**· También hemos aprendido a calcular el **cuarto proporcional**, dados tres números encontrar un cuarto (**x**) que esté en proporción con ellos·

En este apartado vamos a observar unas relaciones particulares entre magnitudes que aparecen frecuentemente en la vida cotidiana: las **relaciones de proporcionalidad**·

Vamos a ver que cumplen que o bien la división (razón), o bien el producto permanecen constantes ante las variaciones que puedan darse· Tendremos que tener en cuenta que no todas las magnitudes son proporcionales; por la importancia de éstas, al resto, las denominaremos **no proporcionales**·





Si sigues estudiando después del ESPAD, verás que cuando hay más de dos magnitudes proporcionales se estudia la **proporcionalidad compuesta**. También es muy útil utilizar **fórmulas**. Seguramente en tus estudios anteriores habrás visto alguna, por ejemplo:

- La relación entre la longitud de una circunferencia y su radio que es: **$L = 2 \cdot \pi \cdot R$**
- La relación entre la velocidad constante de un coche que recorre la distancia entre Zaragoza y Huesca (70 km) y el tiempo empleado: **$V = 70 / T$**
- La relación entre el área de un circulo y su radio que es: **$A = \pi \cdot R^2$**

$L = 2 \cdot \pi \cdot R$	**$V = 70 / T$**	**$A = \pi \cdot R^2$**
$L / R = 2 \cdot \pi \approx 6,28$ = cte.	V . T = 70 = constante	$A / R = 3,14 \cdot R$
División constante.	Producto constante.	Ni A / R = cte, ni $A \cdot R$ = cte
L y **R** *directamente* proporcionales	**V** y **T** *inversamente* proporcionales	**A** y **R** no proporcionales

2.1. Magnitudes proporcionales directas

Se dice que dos magnitudes x e y están en proporción directa si cumplen que su división es constante al realizarse variaciones sobre sus cantidades (a x_1 le corresponde y_1; a x_2, y_2; a x_3, y_3;...).

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{y_1} = \cdots = \boldsymbol{k} = Constante \qquad \boldsymbol{k}: constante\ de\ proporcionalidad$$

Observa que para que esto se cumpla es necesario que si una magnitud aumenta la otra también debe aumentar y viceversa, y, si una disminuye la otra también debe disminuir y además es necesario que se mantenga constante su división.

Fíjate que cada pareja de razones forman una proporción, así, si nos dan tres datos podremos calcular el cuarto proporcional como veíamos en el apartado anterior.

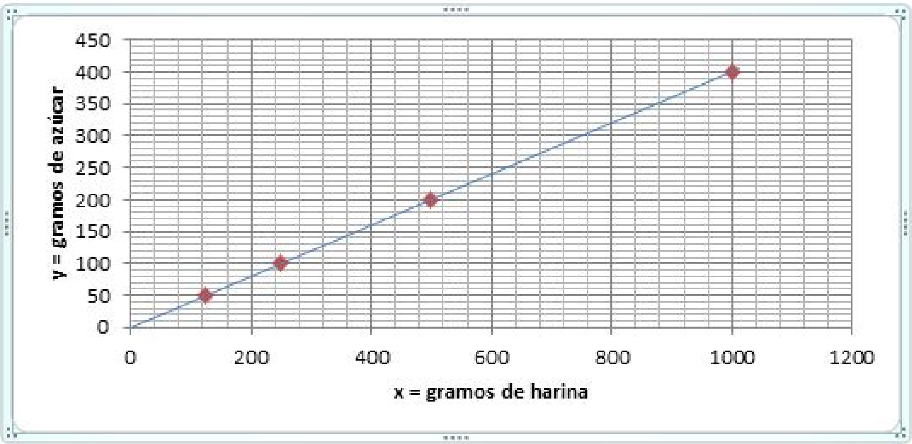
Como estudiarás en la unidad 6, si se representan las variaciones de las dos magnitudes en dos ejes coordenados se obtiene siempre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Vamos a verlo detenidamente con un ejemplo. Supongamos que para hacer una tarta tenemos que mezclar 250 gramos de harina por cada 100 gramos de azúcar. Si hacemos una tabla con algunas cantidades obtenernos:

x (g. de harina)	y (g. **de azúcar)**	**x/y = 2,5 (constante)**
$x_1 = 250$	$y_1 = 100$	250/100 = 2,5
$x_2 = 500$	$y_2 = 200$	500/200 = 2,5
$x_3 = 1000$	$y_3 = 400$	400/1000 = 2,5
$x_4 = 125$	$y_4 = 50$	125/50 = 2,5

Observamos que a mayor cantidad de harina le corresponde mayor cantidad de azúcar de forma que la división siempre es la misma 2,5. Dicho de otra manera, que por cada 1 gr de azúcar le corresponden 2,5 gr. de harina.

Si representamos las magnitudes en unos ejes coordenados, obtenemos la siguiente representación gráfica:



Resolución de problemas entre magnitudes directamente proporcionales.

Debido a que las dos magnitudes son proporcionales directas, si nos dan tres datos de la proporción podemos calcular el cuarto.

Ejemplo

- *Como hemos visto en el ejemplo anterior, para hacer un pastel de 1000 gr. de harina teníamos que añadir 400 gr. de azúcar. Si deseamos hacer un pastel con 300 gr. de harina, ¿Cuánto azúcar tendremos que añadir?*

  Como el azúcar y la harina están en proporción directa, ya que cuando aumenta uno también debe aumentar el otro y debe hacerlo de forma constante, se cumple entonces la propiedad de que su división debe ser constante, por lo tanto se verifica la proporción:

$$\frac{1000}{400} = \frac{300}{x}$$

  Resolviendo el cuarto proporcional obtenemos:

$$1000 \cdot x = 300 \cdot 400$$

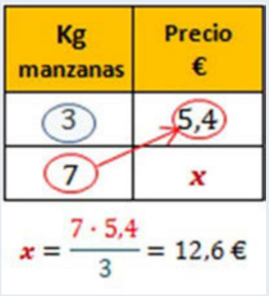
$$x = \frac{300 \cdot 400}{1000} = \mathbf{120\ g} \text{ de azúcar tendremos que añadir}$$

más...

Regla de tres...

Quizás te hayan enseñado anteriormente, por no tener conocimiento de las proporciones o del álgebra, a resolver problemas de proporcionalidad mediante la **"Regla de tres"**.

Ponías los datos ordenados en una tabla y luego los "multiplicabas en cruz" y dividías por el número que quedaba sólo. Lo puedes recordar en el ejercicio siguiente.

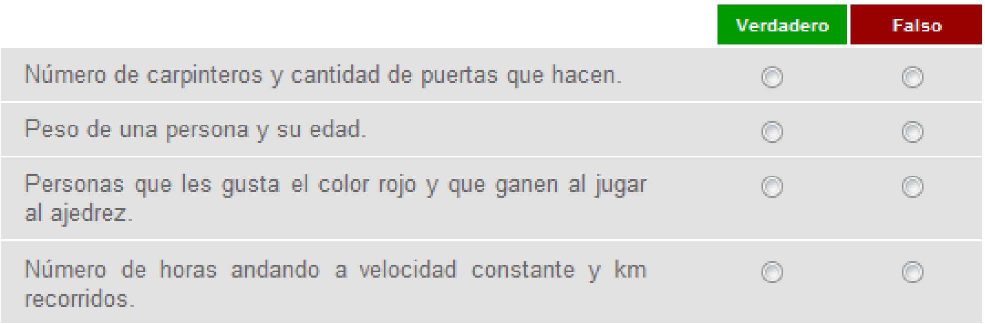


Kg manzanas	Precio €
3	5,4
7	x

$$x = \frac{7 \cdot 5{,}4}{3} = 12{,}6\ €$$

Verdadero o falso

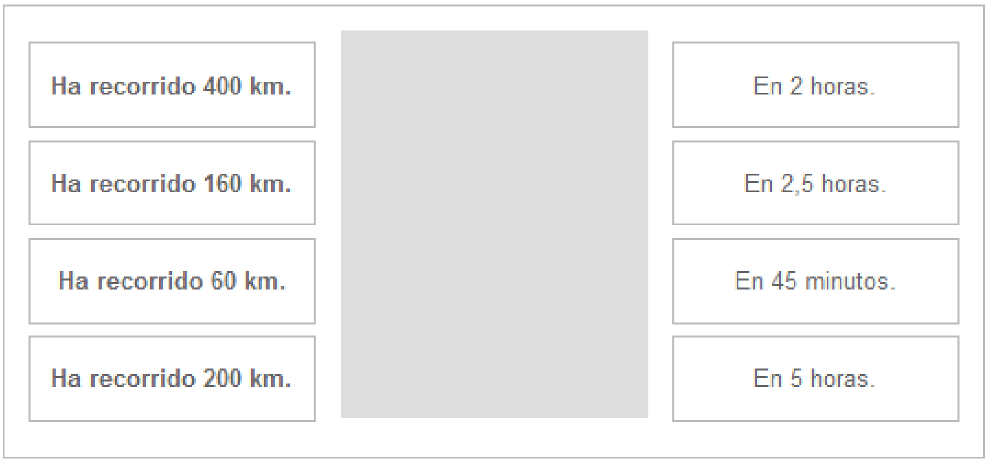
De entre las siguientes magnitudes señala, con V o F, las que mantengan una relación directamente proporcional.



	Verdadero	Falso
Número de carpinteros y cantidad de puertas que hacen.	○	○
Peso de una persona y su edad.	○	○
Personas que les gusta el color rojo y que ganen al jugar al ajedrez.	○	○
Número de horas andando a velocidad constante y km recorridos.	○	○

Relaciona

Si en un coche vamos a la velocidad constante de 80 km/h. Relaciona el espacio recorrido y el tiempo empleado en la siguiente tabla.



Ha recorrido 400 km.	En 2 horas.
Ha recorrido 160 km.	En 2,5 horas.
Ha recorrido 60 km.	En 45 minutos.
Ha recorrido 200 km.	En 5 horas.

Elige la correcta

Al subir una montaña un grupo de personas lleva un ritmo constante de 360 metros de altura por cada 2 horas. ¿Cuánto les costará subir al Aneto (3404 m) desde el refugio de la Renclusa (2144 m)?.

Les costará 4 horas.	○
Les costará 3,5 horas	○
Les costará 7 horas.	○
Les costará 8 horas.	○

2.2. Magnitudes proporcionales inversas

Se dice que dos magnitudes **x** e **y** están en proporción inversa si cumplen que su **producto es constante** al realizarse variaciones sobre sus cantidades (**x_1, x_2, x_3**, … , **y_1, y_2, y_2**, …). Así:

$$x_1 \cdot y_1 = x_1 \cdot y_1 = x_1 \cdot y_1 = \cdots = \boldsymbol{k} = Constante \quad \boldsymbol{k}: constante\ de\ proporcionalidad$$

Observa que para que esto se cumpla es necesario que si una magnitud aumenta la otra disminuya y viceversa de manera que mantienen constante el producto.

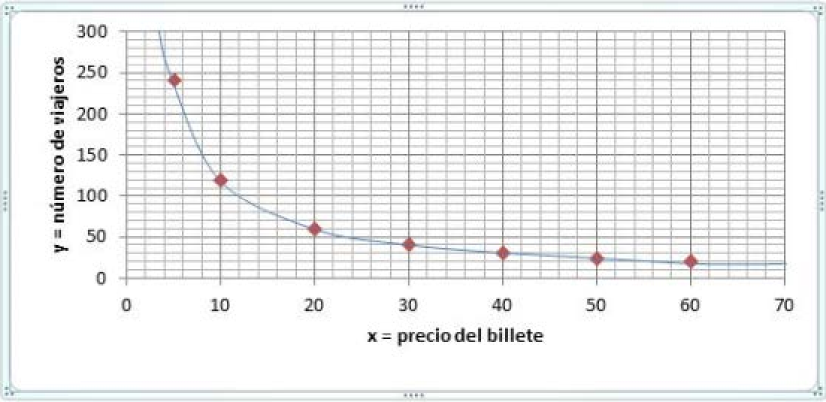
Vamos a verlo detenidamente con un **ejemplo**.

Supongamos que para ir a Benasque alquilamos un autobús que cuesta 1200 euros. Según el número de viajeros que vayamos tendremos que pagar distinto precio del billete para sufragar el autobús. Si hacemos una tabla con algunas cantidades obtenernos:

x (Número de viajeros)	y (Precio del billete)	$x_n \cdot y_n$ = 1200 (Constante)
x_1 = 10	y_1 = 120	10 · 120 = 1200
x_2 = 20	y_2 = 60	20 · 60 = 1200
x_3 = 30	y_3 = 40	30 · 40 = 1200
x_4 = 5	y_4 = 240	5 · 240 = 1200

Observamos que se cumple a mayor número de viajeros menor precio del billete de forma que el producto siempre es constante 1200 euros (el precio del alquiler del autobús).

Si representamos las magnitudes en unos ejes coordenados obtenemos la siguiente gráfica, ahora no es una recta es una curva que se llama hipérbola:



Resolución de problemas entre magnitudes inversamente proporcionales.

Debido a que las dos magnitudes son proporcionales i**nversas**, ya que cuando una aumenta la otra debe disminuir de forma proporcional, cumplen la propiedad de que **su producto es constante**, así, si nos dan tres datos de la igualdad $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ podremos calcular el cuarto.

Ejemplo

- *Como hemos visto en el ejemplo, para ir de viaje 30 personas debía pagar cada uno un billete de 40 euros. Si pensamos que vienen a Benasque 50 personas, ¿cuánto tendremos que cobrar por cada billete?*

  Como el número de viajeros y el precio del billete están en proporción inversa, cumplen la propiedad de que su producto debe ser constante, por lo tanto se cumple:

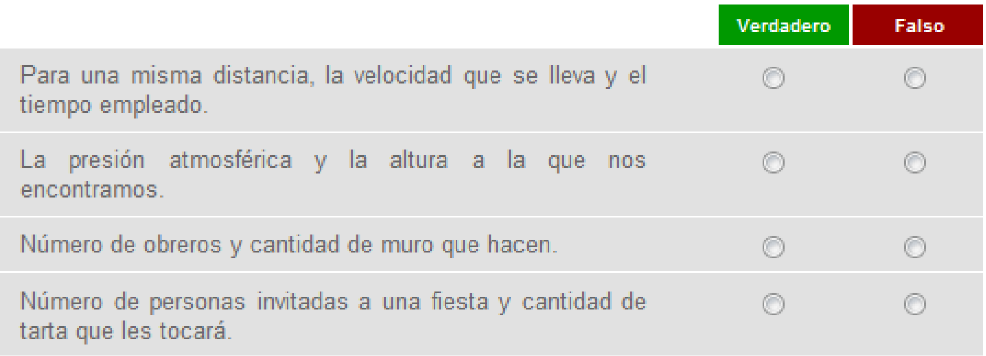
$$30 \cdot 40 \ = \ 50 \cdot x$$

Resolviendo el cuarto proporcional, obtenemos:

$$x \ = \ \frac{30 \cdot 40}{50} \ = \ \mathbf{24}\ euros\ por\ cada\ billete.$$

Verdadero o falso

De entre las siguientes magnitudes señala, con V o F, las que mantengan una relación inversamente proporcional.



	Verdadero	Falso
Para una misma distancia, la velocidad que se lleva y el tiempo empleado.	○	○
La presión atmosférica y la altura a la que nos encontramos.	○	○
Número de obreros y cantidad de muro que hacen.	○	○
Número de personas invitadas a una fiesta y cantidad de tarta que les tocará.	○	○

Relaciona

Si 10 obreros levantan un muro en 12 días, relaciona el tiempo que tardarán según el número de obreros que trabajen en su construcción.

Para acabarlo en 7 días y medio.	Harán falta 20 obreros
Para acabarlo en 10 días.	Harán falta 30 obreros
Para acabarlo en 4 días.	Harán falta 12 obreros
Para acabarlo en 24 días.	Harán falta 5 obreros
Para acabarlo en 6 días.	Harán falta 16 obreros

Elige la correcta

Sabemos que para ir de Zaragoza a Benasque con una velocidad media de 100 km/h tardamos 2horas y 20 minutos. ¿Cuánto tardaremos si vamos a 80 km/h de media?

Tardaremos 3 horas ○

Tardaremos 4 horas. ○

Tardaremos 2 horas y media ○

Tardaremos 2 horas y tres cuartos. ○

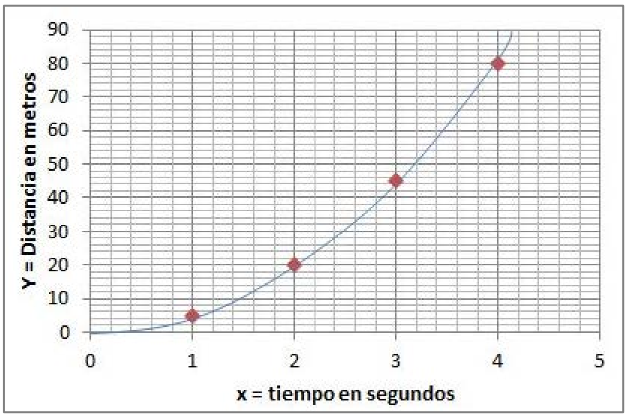
2.3. Magnitudes no proporcionales

Aunque muchas magnitudes son proporcionales, hay cuantiosas que no lo son. De hecho, todas las que su división o su multiplicación no permanecen constantes en sus variaciones son **no proporcionales**. Así, sus representaciones gráficas serán todo el abanico que sea distinto a una recta que pase por el origen o una hipérbola.

Veamos un ejemplo. Si dejamos caer una piedra desde un puente (despreciando el rozamiento del aire) y tomamos nota de la distancia que recorre en el tiempo obtenemos la siguiente tabla para la distancia recorrida y el tiempo empleado para ello.

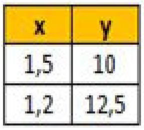
Distancia en m aproximada	Tiempo en segundos	¿Relación directa? ¿x/y = constante? NO	¿Relación inversa? ¿x·y = constante? NO
5	1	5 / 1 = 5	5 · 1 = 5
20	2	20 / 2 = 10	20 · 2 = 40
45	3	45 / 3 = 15	45 · 3 = 135
80	4	80 / 4 = 20	80 · 4 = 320
¿x?	5	NO lo podemos calcular, NO PROPORCIONAL.	

En la tabla observamos que **ni el producto ni la división permanecen constantes** (aunque al aumentar una lo hace la otra, no lo hace de forma proporcional), luego estas dos magnitudes son **no proporcionales** y por lo tanto no podemos aplicar sus propiedades para calcular un cuarto término a partir de tres de ellos. No podemos predecir a qué distancia estará del puente a los cinco segundos por este método.

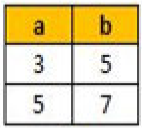


Relaciona

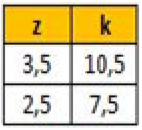
Relaciona cada tabla, con la respuesta correcta.



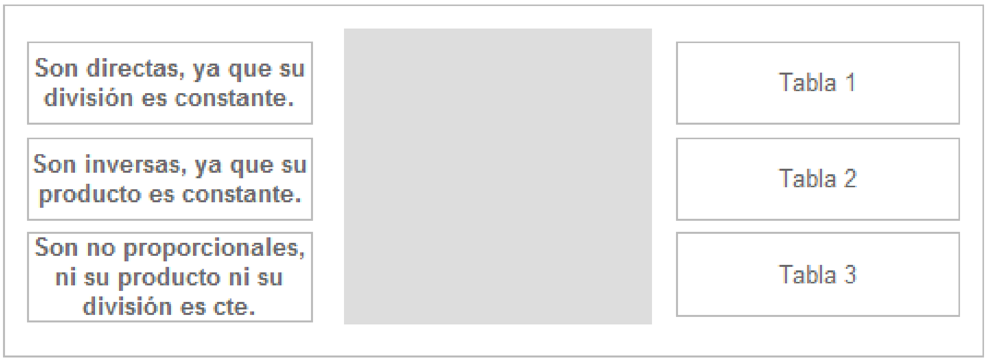
x	y
1,5	10
1,2	12,5



a	b
3	5
5	7



z	k
3,5	10,5
2,5	7,5



Son directas, ya que su división es constante.

Son inversas, ya que su producto es constante.

Son no proporcionales, ni su producto ni su división es cte.

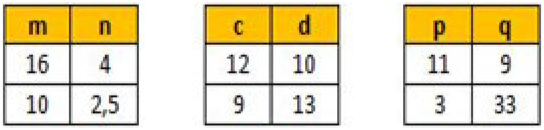
Tabla 1

Tabla 2

Tabla 3

Relaciona

Relaciona cada tabla, con la respuesta correcta.



m	n
16	4
10	2,5

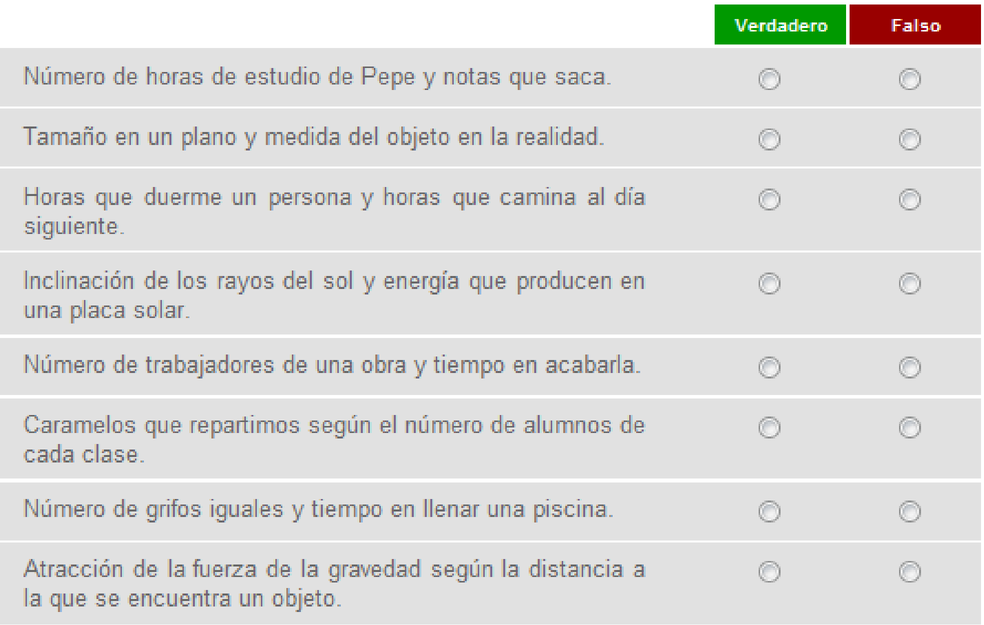
c	d
12	10
9	13

p	q
11	9
3	33

Son inversas, ya que su producto es constante.	Tabla 4
Son no proporcionales, ni su producto ni su división es cte.	Tabla 5
Son directas, ya que su división es constante.	Tabla 6

Verdadero o falso

Para resolver alguna de estas preguntas quizás tengas que informarte más sobre las magnitudes que se relacionan... De entre las siguientes magnitudes señala, con V o F, las que mantengan una relación no proporcional.



	Verdadero	Falso
Número de horas de estudio de Pepe y notas que saca.	○	○
Tamaño en un plano y medida del objeto en la realidad.	○	○
Horas que duerme un persona y horas que camina al día siguiente.	○	○
Inclinación de los rayos del sol y energía que producen en una placa solar.	○	○
Número de trabajadores de una obra y tiempo en acabarla.	○	○
Caramelos que repartimos según el número de alumnos de cada clase.	○	○
Número de grifos iguales y tiempo en llenar una piscina.	○	○
Atracción de la fuerza de la gravedad según la distancia a la que se encuentra un objeto.	○	○

2.4. Resolución de problemas de proporcionalidad.

La mayor dificultad reside en **saber si las magnitudes son o no proporcionales**. Si no nos lo dicen deberíamos experimentar y comprobar si su división o su producto permanecen constantes. No obstante la mayoría de las relaciones las podemos intuir pero deberíamos pensar un poco más cuando son situaciones nuevas y no conformarnos sólo en razonar con si aumenta una magnitud la otra también lo hace o disminuye... Un niño de un año mide de altura unos 70 centímetros, pero claramente, aunque medirá más, a los dos años no medirá 140 cm y a los 10 años tampoco 7 metros...

Para resolver los problemas de proporcionalidad, es necesario primero identificar las dos magnitudes que se relacionan (cuidado que a veces nos dan datos que no necesitamos para resolver el problema que nos proponen), realizar una tabla con ellas poniendo los datos que nos dan teniendo en cuenta que cada magnitud tenga los datos en las mismas unidades, observar si son directas o inversas, aplicar la propiedad correspondiente y resolver el cuarto proporcional para encontrar el valor de la magnitud que nos piden.

Realicémoslo en algunos ejemplos:

A) *Un grupo de 6 obreros realizan una tapia en 10 días, si tras 15 días de descanso, desean realizar otra obra igual, pero en 4 días, ¿cuántos obreros deberán estar en el grupo?*

Nos preguntan por el número de obreros y la otra magnitud es el número de días en realizar la obra. Observamos que hayan descansado 15 días no interviene en el problema. Vemos que para terminar una obra igual en menos días se necesitan más obreros, será **inversa**, ya que imaginamos que todos trabajan por igual y no hay dificultades de coordinación por ser más.

Realizamos la tabla:

x = nº de obreros	y = nº de días	Es INVERSA: x · y = constante
6	10	6 · 10 = x · 4
x	4	

Resolvemos la relación entre las magnitudes: 6 · 10 = x · 4

60 = x · 4 ⇒ x = 60/4 = 15 obreros serán necesarios en el grupo.

B) *En un mapa, la longitud de un campo de fútbol es de 7 decímetros de largo y en la realidad tiene 100 m de largo. Si el ancho del campo en el mapa es de 42 centímetros, ¿cuántos metros tendrá en la realidad?*.

Nos preguntan por el número de metros del ancho de un campo de fútbol en la realidad y la otra magnitud es la medida en un plano que tomaremos en cm (para trabajar con números enteros, pero se podría elegir la magnitud que deseemos con tal de que sea la misma para los dos datos de la distancia en el mapa).

Vemos que cuanto más grande sea una distancia en el mapa mayor será en la realidad, y además deberá mantener las proporciones para que sea más fácilmente interpretable. Luego serán magnitudes **directamente** proporcionales.

Realizamos la tabla:

x = Distancia en el mapa en cm	y = distancia en la realidad en m	ES DIRECTA: x/y = constante división constante
Largo 70	100	70 / 42 = 100 / x
Ancho 42	x	

Resolvemos la relación entre las magnitudes: 70 / 42 = 100 / x ⇒ 70 · x = 100 · 42 ⇒

⇒ x = 100 · 42 / 70 = 60 m tendrá de ancho el campo de fútbol.

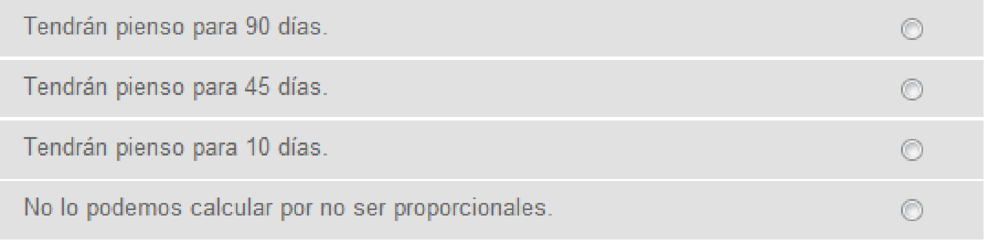
C) *En una familia el hijo tiene 10 años, y sus padres 32, ¿cuándo el hijo tenga 20 años qué edad tendrán sus padres?*

Nos preguntan por la edad de los padres y la otra magnitud es la edad del hijo. Cuando una magnitud aumenta, la otra también, pero **no lo hace de forma proporcional**, aumenta igual para los padres que para el hijo. Es una relación no proporcional (obviamente cuando el hijo tenga el doble de la edad actual -20 años - los padres no pasarán a tener el doble - 64 años -).

Así, si pasan 10 años para el hijo también pasarán 10 años para sus padres que tendrán 32 más 10, 42 años en ese momento.

Elige la correcta

En una granja tienen pienso para alimentar a 21 vacas durante 30 días. Si venden 7 vacas, ¿para cuántos días tendrán pienso?



Tendrán pienso para 90 días. ○

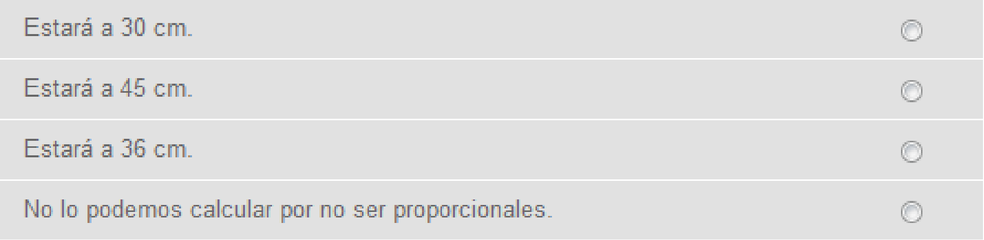
Tendrán pienso para 45 días. ○

Tendrán pienso para 10 días. ○

No lo podemos calcular por no ser proporcionales. ○

Elige la correcta

Observamos que al llenarse una piscina si un grifo está abierto 50 minutos sube el agua 15 cm, ¿qué altura tendrá en dos horas?



Estará a 30 cm. ○

Estará a 45 cm. ○

Estará a 36 cm. ○

No lo podemos calcular por no ser proporcionales. ○

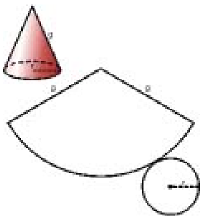
3. Aplicaciones de la proporcionalidad a casos concretos.

En este punto vamos a estudiar algunos problemas relativos a la proporcionalidad directa, que se usan con frecuencia, con el fin de sistematizarlos. Aprenderemos a utilizar el **Índice de Variación** (I.V.) que permitirá convertir problemas no proporcionales en proporcionales directos que así podremos resolver.

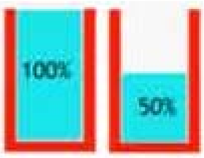
A continuación te presentamos una serie de fotografías relacionadas con problemas que tienen que ver con la proporcionalidad.

Cuando compramos para ver qué OFERTA nos interesa más, tenemos que hacer cálculos de proporcionalidad.

Esta maqueta se ha hecho a escala. Esto sólo es mantener la proporción entre el objeto real y su representación en el plano o en el espacio.



Al calcular el área lateral de un cono se utiliza la proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia pequeña respecto de la grande con radio la generatriz.



Los porcentajes son un caso particular de proporcionalidad directa manteniendo una de las cantidades en 100.

Los cálculos de aplicación del IVA, Tasas o recargos se podrán transformar en proporcionales mediante el Índice de Variación.

La relación entre las cantidades de un pastel mantienen su proporción.

Para saber la cantidad de dinero que nos toca de una participación de lotería, en ocasiones tendremos que hacer un reparto proporcional.

Un muelle se comporta como una proporción entre el peso que soporta y la elongación que le produce...hasta que se deforma.

La velocidad y el tiempo en recorrer una distancia fija son magnitudes inversamente proporcionales.

3.1. Porcentajes.

A. Tanto por ciento correspondiente a una razón.

Un caso particular de magnitudes directamente proporcionales es **el tanto por ciento**, **%.** Se trata de hacer la proporción directa de una razón cualquiera con otra razón de denominador **100**.

Esto se utiliza por ser el 100 un número bien conocido y da una idea más sencilla de las partes del mismo, la mitad: 50, la cuarta parte: 25, la tercera parte: un poco más de 33, la quinta parte: 20, la décima parte: 10, etc. Así, cuando nos dicen que el 23 por ciento de la población usa bicicleta, nos hacemos una idea rápida de cuantas personas la usan. Fíjate en el ejemplo:

Ejemplo

- *A tres de cada cinco españoles les gusta el fútbol, ¿qué porcentaje de los españoles representan?.*

$$\frac{3}{5}=\frac{x}{100} \Rightarrow x=\frac{3\cdot 100}{5}=\mathbf{60}\%\ de\ los\ españoles$$

Observa que si haces la división indicada en la razón (3/5) se obtiene el tanto por uno y si lo multiplicas por 100, el %.

B. Tanto por ciento de una cantidad.

Es tan usual que realizamos la operación directamente, el 24 % de los 300 habitantes de Sahún tiene coche, esto se calcula (si lo recuerdas es aplicar una "fracción" sobre un número):

$$24\ \%\ de\ 300=\frac{24}{100}\cdot 300=72\ personas\ tienen\ coche\ en\ Sahún$$

Observa que:

- si fuera el 100% sería 100/100 · 300 = 300 todos los habitantes de Sahún.
- si fuera el 50% de 300 = 50 /100 · 300 = 150 habitantes, claro, la mitad.
- si fuera el 25 % de 300 = 25/ 100 · 300 = 75 habitantes, ¡la cuarta parte!.

Fíjate en la tabla siguiente qué es una proporción directa donde uno de los términos es **100:**

Nº de habitantes con coche	**Nº de habitantes**	**ES DIRECTA**: x/y = constante división constante
24	**100**	$\frac{24}{x}=\frac{100}{300}$ 300 · 24 = 100 · x $x=\frac{300\cdot 24}{100}$=72 personas.
x	300	

Elige la correcta

En una lata de sardinas leemos: peso neto 110 grs. y peso escurrido 77 grs., ¿qué tanto por ciento de sardinas hay en esa lata?.

Hay un 110 % de sardinas. ○

Hay un 77 % de sardinas. ○

Hay un 67 % de sardinas. ○

Hay un 70 % de sardinas. ○

Elige la correcta

En un bloque de apartamentos en la montaña viven 3 familias. Si el bloque tiene 4 plantas con 6 pisos en cada una de ellas, ¿qué porcentaje de viviendas están ocupadas todo el año?.

El 3 % de los apartamentos. ○

El 24 % de los apartamentos. ○

El 12,5 % de los apartamentos. ○

Ninguno de los porcentajes anteriores. ○

Practica

2) *En un pueblo hay 1350 habitantes. El número de mujeres representa el 62% del total. ¿Cuántas mujeres hay en ese pueblo?*

3) *En las últimas elecciones municipales, de un censo de 2990 personas, se abstuvieron 568. ¿Cuál fue el porcentaje de votantes?*

4) *En una población de 10750 habitantes hay un 10% de emigrantes, y el 60% de los inmigrantes son sudamericanos. ¿Cuántos sudamericanos viven en esa localidad?*

5) *Un depósito se llena al 45% de su capacidad. Si se añaden 1315 litros de agua se llenará. ¿Cuál es la capacidad del depósito?*

6) *Una familia dedica el 31% de su presupuesto mensual a gastos de vivienda. Si el último mes gastaron en ese concepto 902 €. ¿A cuánto ascendió el presupuesto?*

7) *A una oposición se presentaron 6180 aspirantes, de los que aprobaron 1112. ¿Cuál fue el porcentaje de aprobados?*

8) *Una tarta que pesa 700 gramos lleva un 5% de agua, un 9% de proteínas, un 13% de grasas y el resto de hidratos de carbono. ¿Cuántos gramos de hidratos de carbono contiene?*

Comprueba

2. *837 mujeres.*

3. *81 % de votantes.*

4. *645 sudamericanos*

5. *2390,91 litros.*

6. *2909,68 €.*

7. *18% de aprobados.*

8. *511 gramos.*

3.2. Tasas y descuentos.

Hay muchas ocasiones en que a una cantidad inicial A, se le suma *(tasa)* o resta *(descuento)* un porcentaje de dicha cantidad A para obtener otra cantidad B resultante final (como estudiarás más adelante, es una ecuación del tipo: A + %A = B).

Estas dos magnitudes, A y B, no son directamente proporcionales, pero se pueden resolver estos problemas si utilizamos el llamado **índice de variación** que convierten las cantidades A y B en proporcionales directas.

- El **índice de variación**, es la variación correspondiente a cada unidad.

TASAS
La cantidad resultante B es proporcional con el índice de variación (1 + %)
Cantidad inicial · índice de variación = cantidad final
DESCUENTOS
La cantidad resultante B es proporcional con el índice de variación (1 - %)
Cantidad inicial · índice de variación = cantidad final.

TASAS

Vamos a utilizar el caso del **IVA** (Impuesto sobre el Valor Añadido).

El estado recauda este impuesto "indirecto" que se grava al consumidor final de un producto, su tipo general es del 18% aunque existen tipos reducidos según el bien a adquirir.

Problema 1: *Queremos comprar una bicicleta que cuesta 230 euros más IVA, ¿Cuánto tendremos que pagar por ella?*

Tendremos que pagar:

$$230 + 18\%\ de\ 230 = 230 + \frac{18}{100} \cdot 230 = 230 + 41{,}4 = \mathbf{271,4}\ €$$

Mediante el Índice de Variación:

$$230 \cdot \boldsymbol{I.V.} = 230 \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right) = 230 \cdot \mathbf{1,18} = \mathbf{271,4}\ €$$

Problema 2: *Tenemos 50 euros. Queremos comprar un regalo en una tienda que no tiene aplicado el 18% de IVA en los precios. ¿Cuánto podrá marcar como máximo la etiqueta del precio del regalo para que podamos pagar con los 50 euros al pasar por caja?*

Este problema lo podremos resolver mediante el I.V.:

$$x \cdot \boldsymbol{I.V.} = 50 \ \rightarrow \ x \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right) = 50 \ \rightarrow \ x \cdot \mathbf{1,18} = 50$$

$$x = \frac{50}{1{,}18} = \mathbf{42,37}\ € \ \textit{como máximo}$$

DESCUENTOS

En épocas de rebajas los comerciantes nos hacen un descuento normalmente sobre el precio final que ya incluye el IVA.

Problema 1: *Si en un escaparate pone que hacen un descuento del 30 por ciento y voy a comprar una cazadora que vale 53 euros, ¿Cuánto dinero tendré que pagar?*

Tendremos que pagar:

$$53 - 30\%\ de\ 53 = 53 - \frac{30}{100} \cdot 53 = 53 - 15{,}9 = \mathbf{37,1}\ €$$

Mediante el Índice de Variación:

$$53 \cdot \boldsymbol{I.V.} = 53 \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 53 \cdot \mathbf{0,70} = \mathbf{37,1}\ €$$

Problema 2: *Tenemos 50 euros. Queremos comprar un regalo en una tienda que nos dicen hacen el 30% de descuento en los precios. ¿Cuánto podrá marcar como máximo la etiqueta del precio del regalo para que podamos pagar con los 50 euros al pasar por caja?*

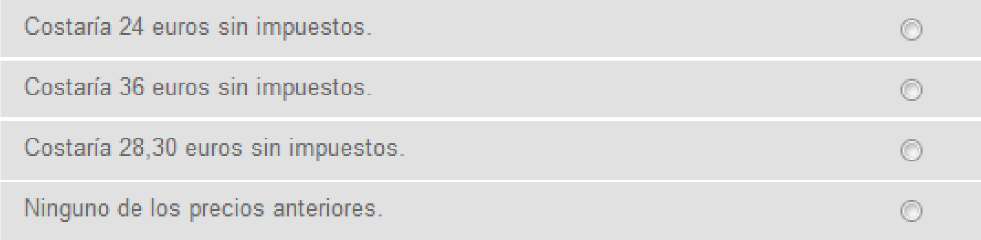
Este problema lo podremos resolver mediante el I.V.:

$$x \cdot I.V. = 50 \rightarrow x \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 50 \rightarrow x \cdot 0{,}7 = 50$$

$$x = \frac{50}{0{,}7} = \mathbf{71{,}43}€ \textit{ como máximo}$$

Elige la correcta

Nos traen la cuenta con 30 euros en un restaurante. Si el IVA es del 6%, ¿cúanto costaba la comida sin impuestos?



Costaría 24 euros sin impuestos. ○

Costaría 36 euros sin impuestos. ○

Costaría 28,30 euros sin impuestos. ○

Ninguno de los precios anteriores. ○

Elige la correcta

¿Cuánto pagaremos por un televisor que cuesta 320 euros y tiene el 20% de descuento?

Pagaremos 300 euros. ○

Pagaremos 256 euros. ○

Pagaremos 340 euros. ○

Ninguna de las cantidades anteriores. ○

Practica

9) *Hace tres años compré un coche por 17000 €. En este tiempo su valor se ha depreciado un 20%. ¿Cuánto vale ahora mi coche?*

10) *Un bebé de dos meses, pesó al nacer 3,55kg. El primes su peso aumentó un 16%, y durante el segundo mes un 18%. ¿Cuánto pesa ahora el bebé?*

11) *Hace cinco años compré un piso por 115000 €. En ese tiempo su valor ha subido un 20%. ¿Cuánto vale ahora el piso?*

12) *La barra de pan ha subido un 8%, y ahora cuesta 0,51€. ¿Cuánto costaba antes de la subida?*

13) *El precio de un ordenador es 675€, a los que hay que añadir el 18% de IVA, pero ahora está con un descuento del 15%. ¿Cuánto cuesta el ordenador?*

14) *En una tienda todos los artículos están rebajados un 23%, pero con carnet de socio hacen además un descuento del 6% sobre el precio ya rebajado. ¿Cuánto pagará un socio por un artículo que antes costaba 140€?*

15) *Un jersey que está rebajado un 28%, cuesta 42,48€. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?*

Comprueba

9. *13600 €*
10. *4,859 kg*
11. *138000 €*
12. *0,47 €*
13. *677,03 €.*
14. *101,33 €*
15. *59 €*

3.3. Repartos proporcionales directos

Hay ocasiones en que se quiere repartir una cantidad C, de forma directamente **proporcional a varios valores a**, **b** y **c**. Vamos a mostrar cómo se podría resolver este tipo de problemas.

- Suponemos que los valores proporcionales que le corresponden de C son **x** para **a**, **y** para **b** y **z** para **c**.
- Necesariamente se cumplirá que la suma de x + y + z = C, para repartir toda la cantidad C propuesta.
- Por tener que ser proporcionales también se tendrá que cumplir que las sus razones verifiquen:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{a} = \frac{\boldsymbol{y}}{b} = \frac{\boldsymbol{z}}{c} = Constante$$

Para poder resolver este problema necesitaremos también utilizar otra propiedad de las proporciones: *"la suma de los antecedentes y los consecuentes de dos o más proporciones forma también una proporción con ellas"*. Lo que es lo mismo matemáticamente:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{C}{a + b + c}$$

Luego nos bastará resolver las siguientes proporciones:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{a} = \frac{C}{a + b + c} \qquad \frac{\boldsymbol{y}}{b} = \frac{C}{a + b + c} \qquad \frac{\boldsymbol{z}}{c} = \frac{C}{a + b + c}$$

Observa, en la tabla siguiente, otra forma de entender la resolución de este problema de **forma más intuitiva**, nos basta fijarnos en que conocemos una razón, ya que a la suma de los valores por los que hacer el reparto proporcional directo (a+b+c) le corresponderá el total de la cantidad C, que nos permite poder plantear seguidamente las tres proporciones que nos darán las soluciones al problema.

Veámoslo de forma más sencilla en un ejemplo.

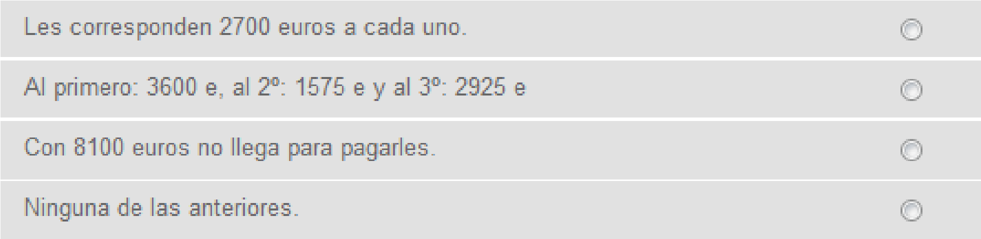
Ejemplo

- *En una agencia de viajes hay tres oficinas A, B y C con 7, 8 y 10 empleados. La agencia ha decidido premiar a sus empleados con 8000 euros, ¿cuánto dinero tendrá que enviar a cada oficina?*

Cantidad que les correspondería del total 8.000 euros	Valores a los que deben ser proporcionales: nº de empleados de cada oficina	Directa, la división es constante
Oficina A $\boldsymbol{x}$	7	$\frac{\boldsymbol{x}}{7} = 320 \quad \boldsymbol{x} = 320 \cdot 7 = \mathbf{2240}$
Oficina B $\boldsymbol{y}$	8	$\frac{\boldsymbol{y}}{8} = 320 \quad \boldsymbol{y} = 320 \cdot 8 = \mathbf{2560}$
Oficina C $\boldsymbol{z}$	10	$\frac{\boldsymbol{z}}{10} = 320 \quad \boldsymbol{y} = 320 \cdot 10 = \mathbf{3200}$
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{8000}$	7 + 8 + 10 = 25	$\frac{8000}{25} = 320 = constante$

Relaciona

En una obra las puertas han sido realizadas por tres carpinteros. El primero ha hecho 32 puertas, el segundo 14 puertas y el tercero 26 puertas. Si por todas las puertas pagaron 8100 euros, ¿qué cantidad de dinero corresponde a cada carpintero?



Les corresponden 2700 euros a cada uno. ○

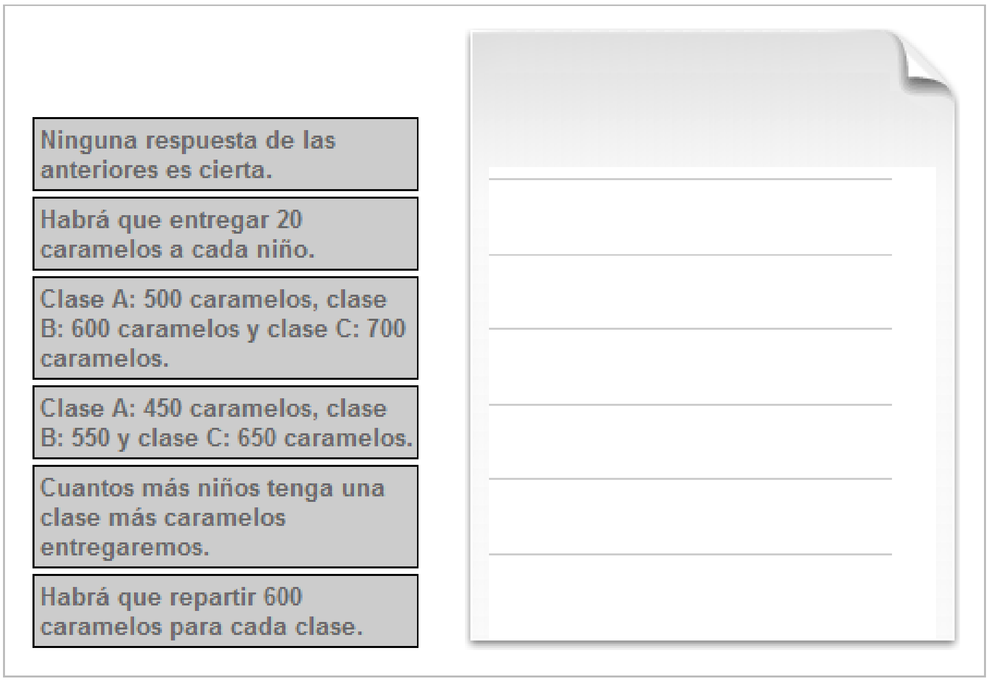
Al primero: 3600 e, al 2º: 1575 e y al 3º: 2925 e ○

Con 8100 euros no llega para pagarles. ○

Ninguna de las anteriores. ○

Elige las correctas

Queremos repartir 1.800 caramelos de forma proporcional entre los niños de un colegio con tres clases. Si en la clase A hay 25 alumnos, en la clase B hay 30 alumnos y en la clase C hay 35 alumnos.



- Ninguna respuesta de las anteriores es cierta.
- Habrá que entregar 20 caramelos a cada niño.
- Clase A: 500 caramelos, clase B: 600 caramelos y clase C: 700 caramelos.
- Clase A: 450 caramelos, clase B: 550 y clase C: 650 caramelos.
- Cuantos más niños tenga una clase más caramelos entregaremos.
- Habrá que repartir 600 caramelos para cada clase.

Ejercicios

1. *En un parque hay 15 abetos (Abies alba), 13 abedules (Betula alba), 14 fresnos (Fraxinus excelsior), 15 servales de cazador (Sorbus aucuparia) y 23 hayas (Fagus sylvatica). Indica la razón entre los abetos y el resto de los árboles de este parque.*

2. *Escribe tres razones equivalentes a cada una de las siguientes.*

   a) $\frac{2}{7}$ *b)* $\frac{1,5}{4}$

3. *Calcula el término desconocido en las siguientes proporciones:*

   a) $\frac{x}{5}=\frac{2}{7}$ *b)* $\frac{4}{5}=\frac{x}{15}$ *c)* $\frac{1,5}{2,5}=\frac{2}{x}$ *d)* $\frac{1,2}{x}=\frac{4}{6}$

4. *Selecciona las razones que forman proporción entre sí:*

   a) $\frac{2}{7}$ *b)* $\frac{2,5}{7}$ *c)* $\frac{3,5}{10}$

   d) $\frac{1,25}{3,5}$ *e)* $\frac{1.75}{4,9}$ *f)* $\frac{21}{70}$

5. *Calcula el cuarto proporcional a 2, 1’5 y 7.*

6. *En un día en la estación de esquí de fondo de los Llanos del Hospital en Benasque, han esquiado 500 personas. Si 150 han tenido que alquilar sus esquís, ¿cuál es la razón entre las personas que traen sus esquís y las que alquilan?*

7. *Durante un partido de fútbol, Javier ha recorrido 5500 m en los 40 minutos que ha estado jugando. Pablo ha jugado una hora y media y ha recorrido 12 000 m. ¿Quién se ha desplazado más por el terreno de juego en razón al tiempo que ha jugado?*

8. *Indica si los siguientes pares de magnitudes son directas, inversas o no proporcionales.*

   a) Los intereses que nos dan en un Banco por depositar un capital y el tiempo que se los prestamos.

   b) El número de ovejas que hay en un rebaño y la cantidad de comida que tenernos que suministrarles.

   c) La altura de un niño o niña y su edad.

   d) La velocidad constante con la que cruzamos un semáforo y el tiempo que tardamos en llegar a la otra acera.

9. *Completa la siguiente tabla sabiendo que las magnitudes* ***x*** *e* ***y*** *son directamente proporcionales.*

x	*4*	*10*		*8*
y			*8*	*5*

10. *Completa la siguiente tabla sabiendo que las magnitudes* ***z*** *y* ***k*** *son inversamente proporcionales.*

z	*4*	*10*		*8*
k			*8*	*5*

11. *Observa las relaciones entre las siguientes parejas de magnitudes y comprueba si son directa o inversamente proporcionales, o no son proporcionales. En caso de que sean proporcionales calcula su constante de proporcionalidad.*

u	*v*
4	28
56	2

m	*n*
7,5	2,5
22,5	7,5

h	*k*
1,6	4,8
5,6	15

12. *Viajando a 99 km/h de media hemos logrado recorrer la distancia entre dos ciudades en 2 horas y 20 minutos. Si hubiéramos ido a la velocidad constante de 110 km/h, ¿cuánto tiempo nos hubiera costado?*

13. *Un coche tiene un depósito de 50 litros. El conductor ha observado que al recorrer 230 km a una velocidad constante de 100 km/h ha gastado 14 litros de combustible. Si ha llenado el depósito, ¿podrá viajar desde Huesca a Santiago de Compostela sin repostar si están a 913 km de distancia?*

14. *A 5 trabajadores les ha costado poner una valla 10 días. ¿Cuánto tiempo les costará a 10 obreros realizar una zanja de 5 metros?*

15. *Miguel ha pagado una factura 220 euros. Sabe que le han subido 20 euros por retrasarse en el pago. ¿Qué tanto por ciento le han puesto de recargo?*

16. *Cuatro parejas han quedado a jugar a los bolos. Ven anunciado que cada 4 partidas les costará 15 euros. Si juegan 7 partidas, ¿cuántos euros tendrá que pagar cada persona?*

17. *De entre las siguientes ofertas, señala la más ventajosa para la compra de un ordenador:*

e) Pague 37 euros al mes durante un año y le descontamos el 5% los seis primeros meses.

f) Pague 42 euros al mes durante un año y le descontamos el 18 por ciento de IVA.

18. *En una ciudad 3 de cada 20 personas tienen coche. ¿Qué porcentaje representan las personas sin coche?*

19. *Para hacer una tarta utilizamos 2 kg de manzanas por cada 7 raciones. Si tenemos previsto invitar a 17 personas:*

g) ¿cuántos kilos de manzanas tendremos que comprar?

h) y si tenemos 23 kg de manzanas, ¿cuántas raciones de tarta nos saldrán?

20. *Pedro, Juan y María han comprado un décimo de lotería de forma que Pedro aportó 4€, Juan 6€ y María 10€. Les tocaron 15 000€ de premio, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno?*

21. *Estoy escribiendo un librito y en el primer capítulo si pongo 24 líneas en cada folio me han resultado de 12 páginas. Si quiero que ocupe 9 páginas, ¿cuántas líneas tendré que escribir en cada una de ellas?*

22. *En una tienda en donde hacen un 20% de descuento, he adquirido una manta que me ha costado 100€. ¿Cuánto dinero me he ahorrado en esta compra?*

23. *Un amigo misterioso nos manda un mensaje el día 10 de octubre a las doce en punto de la mañana para invitarnos a almorzar en las fiestas del Pilar y nos dice: "dentro de 2,34 días te espero en la Tasca del Porrón para almorzar". ¿Qué día, en que hora, minuto y segundo deberé ir a la invitación?*

24. *Tres piscinas iguales se llenan con 2, 3 y 5 grifos iguales. Si la de tres grifos ha tardado 5 horas y 30 minutos en llenarse, ¿en cuántas horas se llenarán las que tienen 2 y 5 grifos?*

25. *En un plano observamos que una mesa cuadrada que mide en la realidad 1,5 m de lado se representa por 1 cm. Si vemos que una piscina tiene de largo 1,1 dm en el plano, ¿qué longitud tendrá en la realidad?*

26. *En el pueblo de Cerler el 90% de las personas tienen al menos un par de esquís. Si en Cerler viven 230 personas, ¿cuántas personas poseen esquís?*

27. *Por realizar un trabajo Ixeia y Alba han recibido 240 euros. Si han trabajado 5 horas juntas y después Ixeia ha trabajado 3 horas más y Alba 4, ¿cuánto deberá cobrar cada una?*

28. *Si por un euro nos dan 1,3791 dólares, ¿Cuántos euros nos darán por 100 dólares?*

29. *Una agente de seguros recibe como salario el 15% de las ventas que realiza. Si desea ganar 1.500 euros al mes, ¿qué cantidad de euros tendrá que vender en seguros?*

30. *En una granja hay 100 vacas y tienen almacenada comida para pasar los tres meses del invierno. Si venden 20 vacas, ¿para cuántos días del principio de la primavera tendrán comida? Supón cada mes de 30 días.*

31. *Si en una cuenta corriente tengo 1200 euros y el banco me da el 1,2% de interés anual, ¿si el banco realiza los pagos trimestralmente, cuánto dinero me ingresará en la cuenta cada trimestre?*

32. *Me venden un coche por 18.000 euros. Si me hacen un descuento del 10 % y no han aplicado el IVA que es para este coche del 18 %:*

a) ¿Cuánto me costará realmente el coche?

b) ¿Obtengo el mismo precio si me hacen el descuento antes o después de aplicar el IVA?

33. *Para realizar un trabajo Pilar tarda 2 horas, Pedro 4 y Guayente 6. ¿En cuánto tiempo realizarían el trabajo juntos?*

Matemáticas y Tecnología 2º

Teoremas de Tales y Pitágoras

4

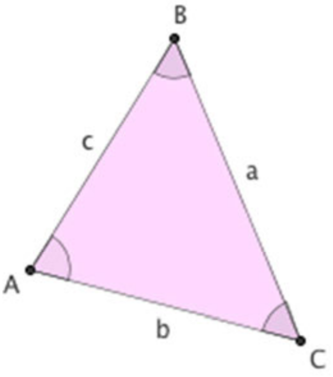
En esta unidad estudiarás Geometría, concretamente dos de los resultados que más aplicaciones prácticas tienen, el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales. Comenzaremos repasando los distintos tipos de triángulos y, en el triángulo rectángulo, estudiaremos el teorema de Pitágoras, muy útil para el cálculo de algunas longitudes desconocidas. A continuación aprenderemos qué son segmentos proporcionales y estudiaremos el teorema de Tales, base del concepto de semejanza que puede aplicarse a distintos campos de la realidad a través de la idea de escala, presente en cualquier plano o mapa por ejemplo.

Una vez estudiada la unidad debes ser capaz de:

- *Identificar los distintos tipos de triángulos, en especial los triángulos rectángulos.*
- *Aplicar el teorema de Pitágoras para calcular alguno de los lados de un triángulo rectángulo.*
- *Reconocer segmentos proporcionales y calcular la razón de proporcionalidad de los mismos.*
- *Aplicar el teorema de Tales al cálculo de longitudes desconocidas.*
- *Reconocer figuras semejantes, en especial triángulos o polígonos en general.*
- *Utilizar el concepto de escala para efectuar cálculos sobre planos o mapas*.

1. Tipos de triángulos

Una propiedad importante de los triángulos

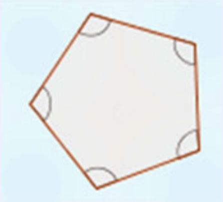


$$A + B + C = 180º$$

Recuerda que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a 180 grados.

más...

Propiedad general



Esta propiedad es un caso particular de la propiedad general que se cumple en todo polígono de n lados, regular o no, según la cual la suma de todos sus ángulos internos es **(n–2)·180º**.

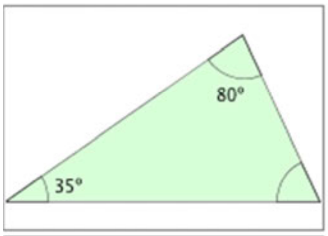
En el pentágono de la figura por ejemplo, la suma de sus 5 ángulos internos es igual a:

(5–2)·180º = 3·180º =540º

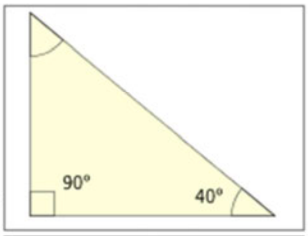
Como un triángulo es un polígono de 3 lados, la suma de sus ángulos internos es:

(3–2)·180º = 180º

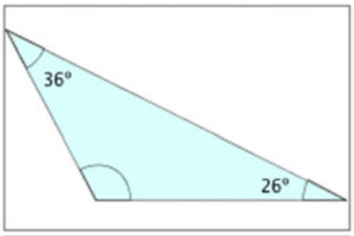
Observa los siguientes triángulos y realiza la práctica posterior:



A



B



C

Relaciona

Relaciona cada uno de los triángulos anteriores con el ángulo que falta:

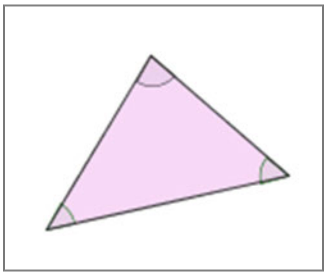
50º	A
65º	B
118º	C

Tipos de triángulos según sus ángulos

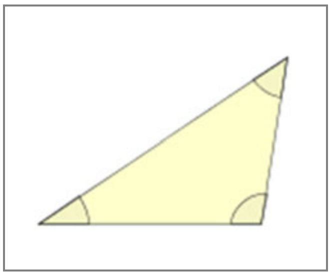
Según cómo sean sus tres ángulos internos, un triángulo puede ser:

- **Acutángulo**: Los tres ángulos son agudos, menores que 90º
- **Obtusángulo**: Tiene un ángulo obtuso, mayor que 90º
- **Rectángulo**: Tiene un ángulo recto, igual a 90º

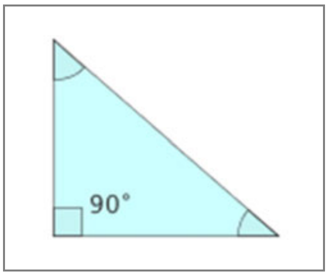
Observa un ejemplo de cada tipo:



Acutángulo



Obtusángulo



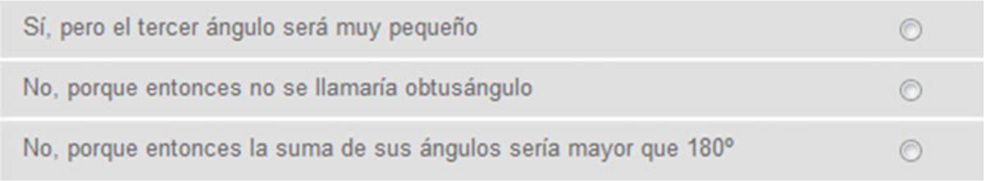
Rectángulo

Elige la correcta

En un triángulo dos de sus ángulos internos son iguales a 42º. Entonces es un triángulo...

Acutángulo ○
Obtusángulo ○
Rectángulo ○

¿Puede tener un triángulo dos ángulos obtusos?



Sí, pero el tercer ángulo será muy pequeño ○
No, porque entonces no se llamaría obtusángulo ○
No, porque entonces la suma de sus ángulos sería mayor que 180º ○

Un triángulo tiene sus ángulos iguales a 89,99º, 50,01º y 40º. Entonces es un triángulo....

Obtusángulo ○
Casi rectángulo ○
Acutángulo ○

En un triángulo rectángulo, los otros dos ángulos son uno doble que el otro. ¿Cuánto valen?

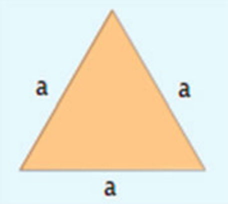
60º y 30º ○
90º y 45º ○
No se puede saber ○

más...

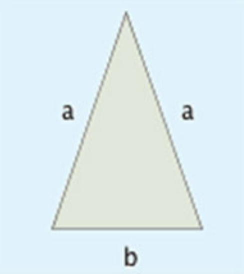
Otra clasificación

Además de según sus ángulos, los triángulos se clasifican según sus lados en:

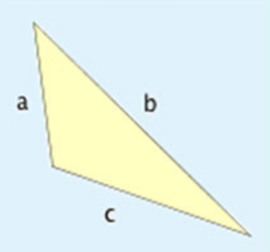
Equiláteros: Los tres lados son iguales.



Isósceles: Dos lados son iguales y el tercero desigual.

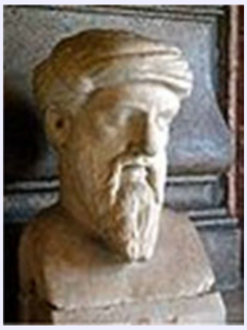


Escalenos: Los tres lados son distintos.



más...

Pitágoras de Samos

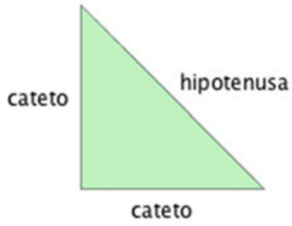


Pitágoras nació en la isla griega de Samos a principios del siglo VI antes de nuestra era. Parece ser que de muy joven viajó por Mesopotamia y Egipto, las civilizaciones más avanzadas entonces, y allí pudo aprender su famoso teorema, aunque la primera demostración se atribuye al mismo Pitágoras o a algunos de sus discípulos.

Ternas pitagóricas: Se llaman así a las ternas de números, a, b y c, que satisfacen la ecuación del teorema de Pitágoras, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$. Por ejemplo 3, 4 y 5 como puedes comprobar, o también 6, 8 y 10. ¿Te atreves a formar alguna más?

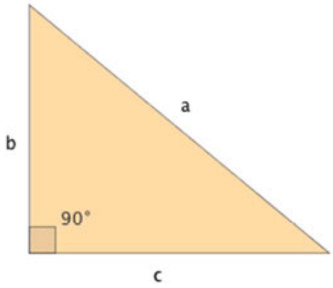
2. El teorema de Pitágoras

Recuerda que en un triángulo rectángulo, los lados que determinan el ángulo de 90º se llaman **catetos** y el lado mayor **hipotenusa**.



El teorema de Pitágoras

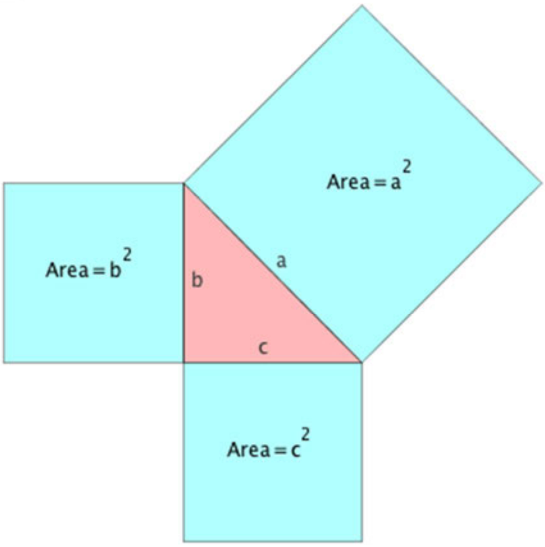
En un triángulo rectángulo el **cuadrado de la hipotenusa** es igual a la **suma de los cuadrados de los catetos**.



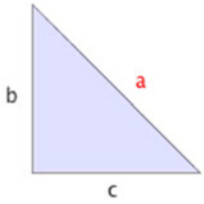
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Interpretación geométrica

Observa que si dibujamos un cuadrado sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras afirma que el correspondiente a la hipotenusa es igual a la suma de los trazados sobre los catetos:



Cálculo de la hipotenusa conocidos los catetos



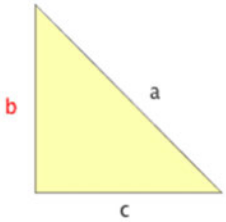
Conocidos los catetos, simplemente debemos efectuar una raíz cuadrada para calcular el valor de la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Cálculo de un cateto conocida la hipotenusa y el otro cateto

En este caso debemos despejar primero el cuadrado del cateto que queremos conocer y luego efectuar la raíz cuadrada:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$



Elige la correcta

En un triángulo rectángulo los catetos miden 2.8 cm. y 5.4 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?


37 cm. ○
6.1 cm. ○
3.7 cm. ○

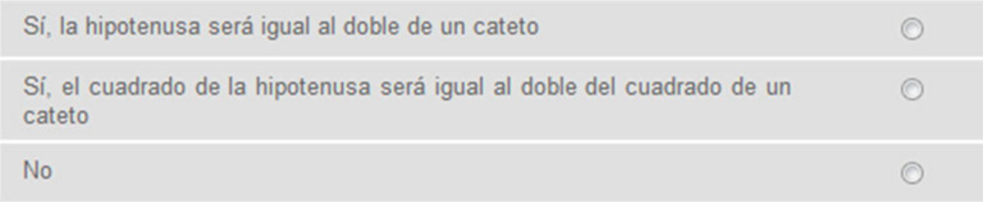
En un triángulo rectángulo un cateto mide 9 cm. y la hipotenusa 15 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?


12 cm. ○
10 cm. ○
1.2 cm. ○

¿Forman los números 4.5, 6 y 7.5 una terna pitagórica?


No ○
Sí ○

¿Puede existir un triángulo rectángulo con los dos catetos iguales?


Sí, la hipotenusa será igual al doble de un cateto ○
Sí, el cuadrado de la hipotenusa será igual al doble del cuadrado de un cateto ○
No ○

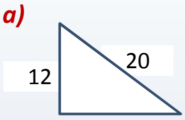
En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es igual a 35º. ¿Cuánto valen los otros dos?


80º y 65º ○
70º y 75º ○
90º y 55º ○

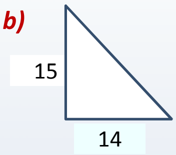
Practica

1) *Calcula el lado que falta en cada triángulo rectángulo:*

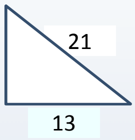
a)



b)



c)



2) *Los lados de un rectángulo miden 15,1 cm y 9 cm, ¿cuánto mide la diagonal?.*

3) *Recuerda que un rombo es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales. ¿Cuánto mide el lado de un rombo de diagonales D=18,5 cm y d=16,2 cm?.*

4) *Calcula la diagonal mayor de un rombo de lado 9,9 cm si la diagonal menor mide 13,5 cm.*

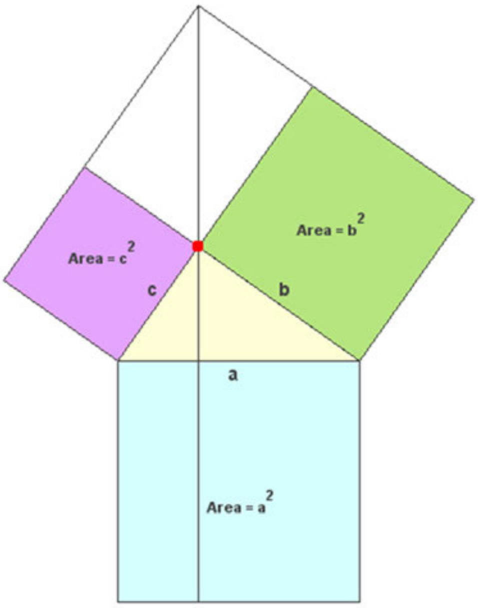
Comprueba

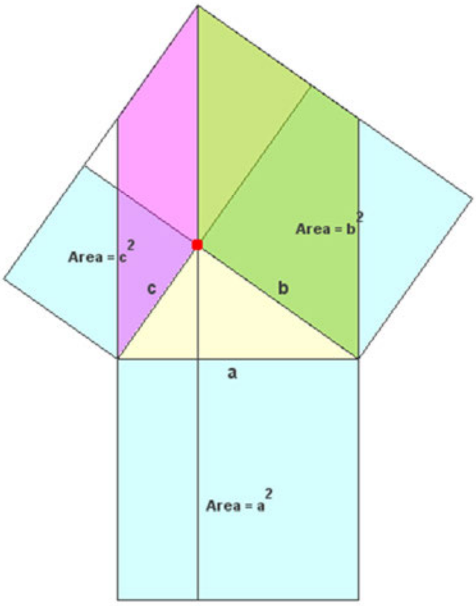
1. *a)16*
   b) 20,5
   c) 16,49
2. *17,58 cm*
3. *12,3 cm*
4. *14,48 cm*

Una demostración del teorema

Observa en primer lugar que ahora el triángulo rectángulo está apoyado sobre la hipotenusa.
Fíjate en los cuadrados de lados b y c, su área respectiva es b^2 y c^2.

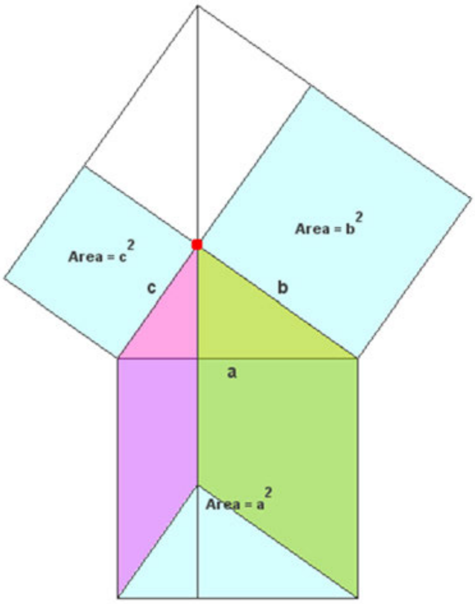
Los paralelogramos de color magenta y verde tienen la misma superficie que los cuadrados de lado c y b, ya que tienen la misma base y la misma altura respectivamente.

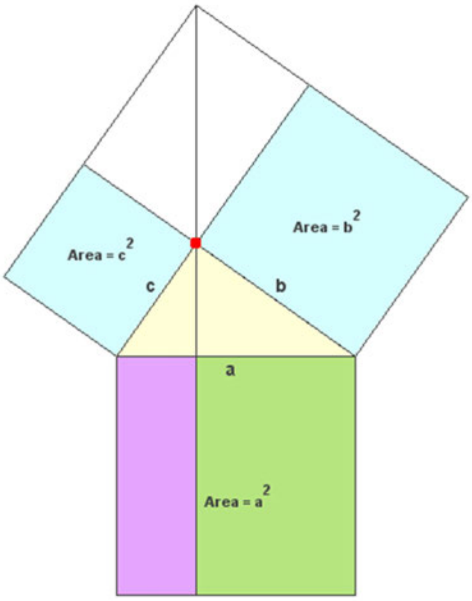




Fíjate que los paralelogramos de color magenta y verde, solo se han desplazado, su área no han variado.

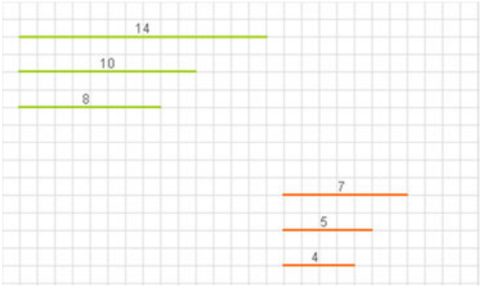
Ahora los paralelogramos magenta y verde se han convertido en rectángulos pero sin cambiar la base y la altura, además entre los dos llenan el cuadrado de lado a por lo que este es la suma de los cuadrados de lados b y c.

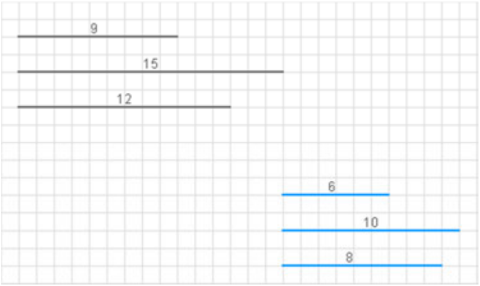




3. Segmentos proporcionales. Teorema de Tales.

Observa unos ejemplos:





Los segmentos de color verde son **proporcionales** a los segmentos de color naranja ya que:

$$\frac{14}{7}=\frac{10}{5}=\frac{8}{4}=2$$

Es decir, se mantiene siempre **igual la razón que hay entre sus longitudes**.

Los segmentos de color gris son **proporcionales** a los segmentos de color azul ya que:

$$\frac{9}{6}=\frac{15}{10}=\frac{12}{8}=1{,}5=\frac{3}{2}$$

Es decir, se mantiene siempre **igual la razón que hay entre sus longitudes**.

Los segmentos de color rojo **no son proporcionales** a los segmentos de color amarillo ya que:

$$\frac{7}{14}=\frac{10}{20}\neq\frac{6}{10}$$

Es decir, no se mantiene siempre igual la razón que hay entre sus longitudes.

Una colección de segmentos de longitudes a, b, c.... son **proporcionales** a otros segmentos de longitudes a', b', c'..... si el cociente, o razón, que se obtiene al dividir cada longitud de un segmento de la primera colección entre la longitud de su correspondiente segmento de la segunda, es siempre el mismo. Es decir:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots=r$$

El cociente r recibe el nombre de **razón de proporcionalidad**.

más…

Recuerda que…

para comprobar si dos razones forman proporción:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

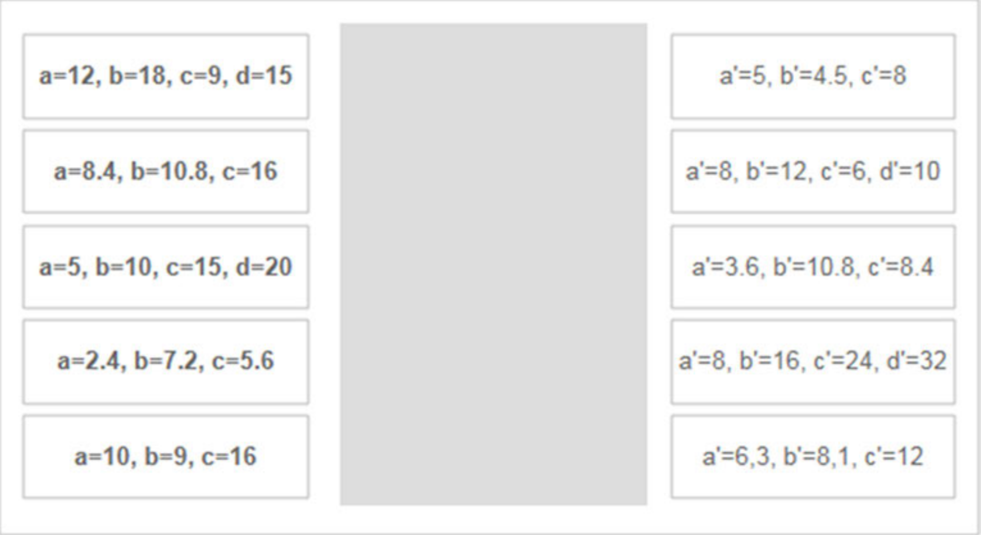
puedes efectuar los productos cruzados

$$a \cdot b' = b \cdot a'$$

que deben ser iguales.

Relaciona

Relaciona cada colección de segmentos con sus proporcionales:

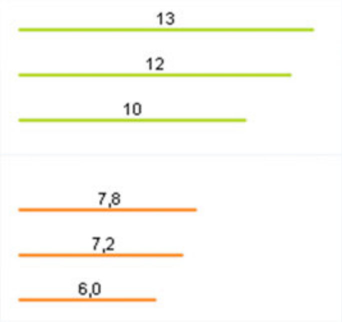


a=12, b=18, c=9, d=15
a=8.4, b=10.8, c=16
a=5, b=10, c=15, d=20
a=2.4, b=7.2, c=5.6
a=10, b=9, c=16

a'=5, b'=4.5, c'=8
a'=8, b'=12, c'=6, d'=10
a'=3.6, b'=10.8, c'=8.4
a'=8, b'=16, c'=24, d'=32
a'=6,3, b'=8,1, c'=12

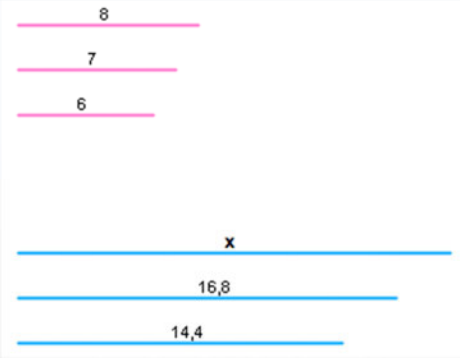
Practica

5) *Calcula la razón de proporcionalidad, **r**, de los siguiente segmentos:*

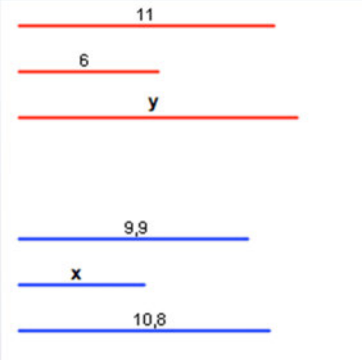


6) *Calcula **x** para que los segmentos sean proporcionales:*

7) *Calcula **x** para que los segmentos sean proporcionales:*



8) *Calcula x e y para que los segmentos sean proporcionales:*



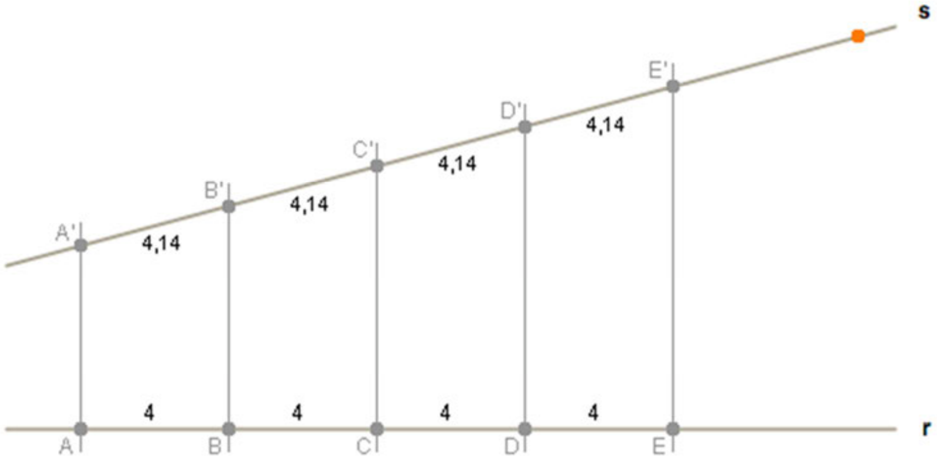
Comprueba

5. *r = 0,6*
6. *x = 8,4*
7. *x = 19,2*
8. *x = 5,4 e y = 12*

3.1. Teorema de Tales

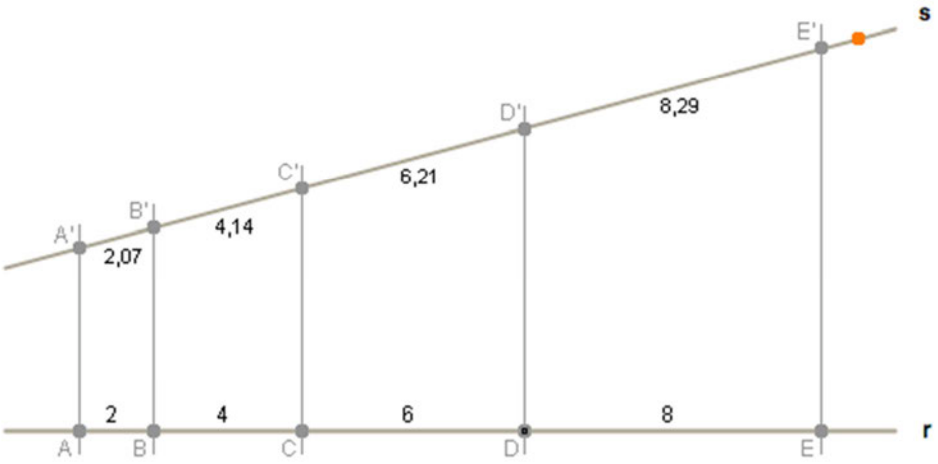
Propiedades previas

En la figura siguiente se han trazado dos rectas no paralelas **r** y **s**. Dichas rectas se cortan por rectas paralelas que determinan los segmentos **AB**, **BC**, **CD** y **DE** sobre la recta **r** y **A'B'**, **B'C'**, **C'D'** y **D'E'** sobre la recta **s**.



Observa que si los segmentos determinados en la recta **r** miden lo mismo, también son iguales sus correspondientes en la recta **s**.

También se puede comprobar que si los segmentos sobre la recta **r** guardan cierta proporción, sus correspondientes sobre la recta **s** también la guardan. En la figura siguiente puedes ver un ejemplo. Ten en cuenta que las longitudes de los segmentos sobre la recta **s** están redondeadas a dos decimales:

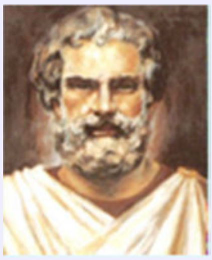


Entonces:

- Si varias rectas paralelas determinan segmentos iguales en una recta **r**, también determinan segmentos iguales en cualquier otra recta **s** a la que corten.
- Si varias rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en una recta **r,** también determinan segmentos proporcionales, con la misma razón de proporcionalidad, en cualquier otra recta **s** a la que corten.

más...

Tales de Mileto



Tales de Mileto vivió entre los siglos VII y VI antes de nuestra era. Viajó en su juventud por Egipto y Babilonia, lugares en los que se familiarizó con la filosofía, la astronomía y las matemáticas, disciplina a la que dotó de sus primeros aspectos formales.

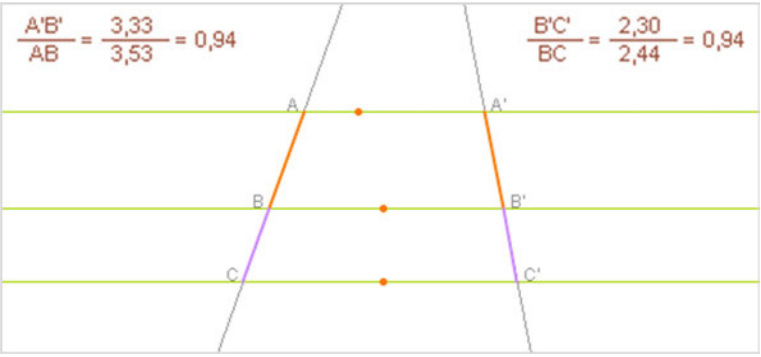
Fue considerado uno de los siete sabios de Grecia por sus hazañas intelectuales, entre las que quizá la más conocida sea la predicción de un eclipse solar.

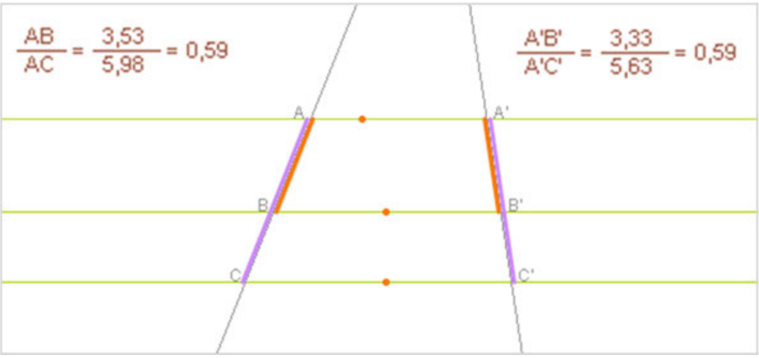
El Teorema

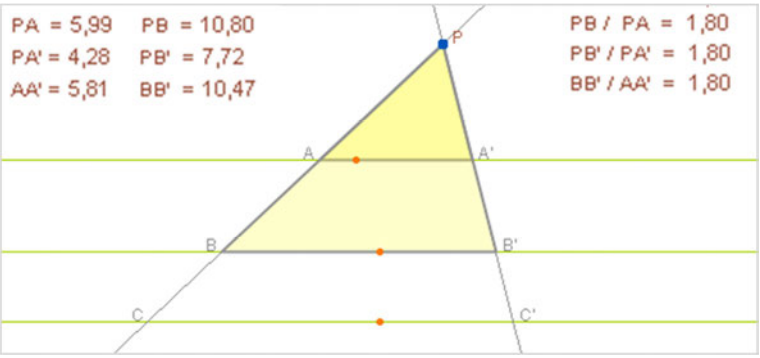
En realidad, las propiedades estudiadas en la página anterior son casos particulares del **Teorema de Tales**, que dice lo siguiente:

> Varias rectas paralelas que cortan a dos rectas cualesquiera, determinan sobre éstas segmentos proporcionales.

Observa en las siguientes figuras algunas comprobaciones del teorema:







En esta última figura aparecen dos triángulos, PAA' y PBB' en la llamada **posición de Tales**. Dos triángulos que pueden ponerse en esta posición son **semejantes**.

Ejemplo

- *Usamos el Teorema de Tales para calcular el valor de x.*

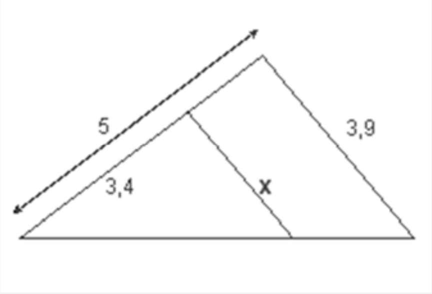
Los dos triángulos están en ***posición de Tales****. Sus lados son* ***proporcionales****:*

$$\frac{5}{3{,}4} = \frac{3{,}9}{x}$$

De donde: $5 \cdot x = 3{,}4 \cdot 3{,}9$

Y entonces:

$$x = \frac{3{,}4 \cdot 3{,}9}{5} = 2{,}65$$



Relaciona

Observa las siguientes figuras y, a continuación, relaciona cada una con su solución correspondiente:

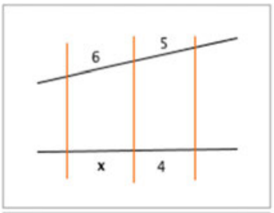


FIGURA A

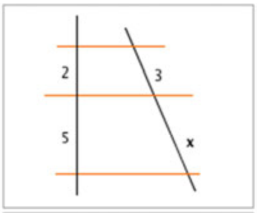


FIGURA B

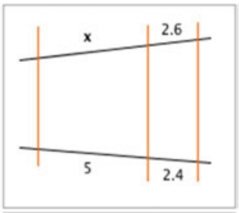


FIGURA C

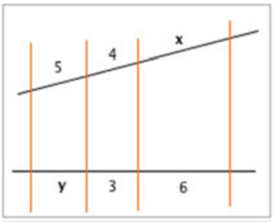


FIGURA D

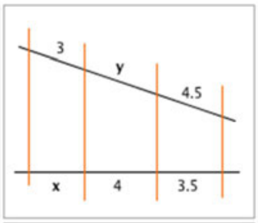


FIGURA E

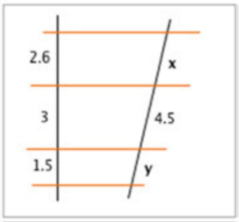


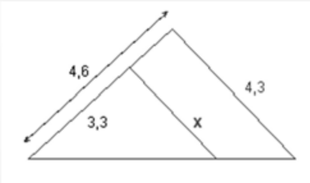
FIGURA F

x = 7.5		FIGURA A
x = 3.9 e y = 2.25		FIGURA B
x =5,42		FIGURA C
x = 4.8		FIGURA D
x = 8 e y = 3.75		FIGURA E
x = 2.53 e y = 5.14		FIGURA F

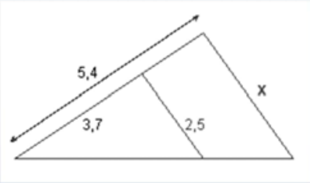
Practica

Utiliza el teorema de Tales para calcular el valor de “x” en los siguientes ejercicios:

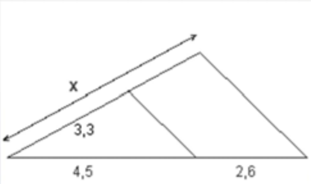
9)



10)



11)



Comprueba

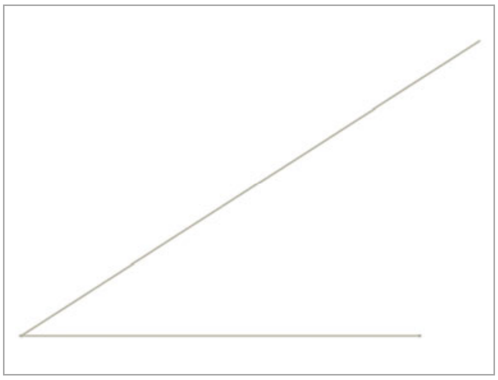
9. *x=3.08*
10. *x=3,65*
11. *x=5,21*

3.2. Aplicaciones

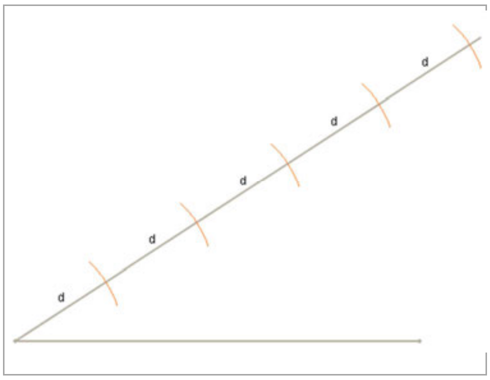
División de un segmento en partes iguales

Una de las aplicaciones fundamentales del teorema de Tales es la posibilidad de dividir un segmento en un número determinado de partes iguales. Observa en el siguiente ejemplo como se haría para dividir en cinco partes iguales:

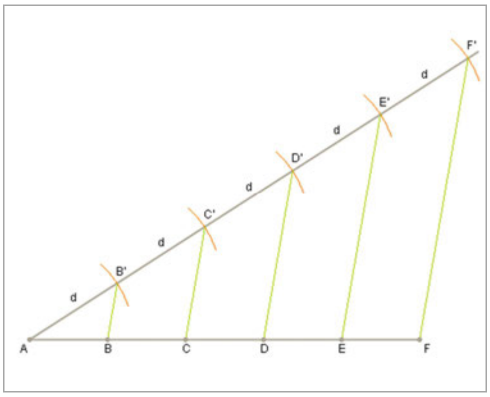
En primer lugar, por uno de los extremos del segmento se traza una semirrecta auxiliar:



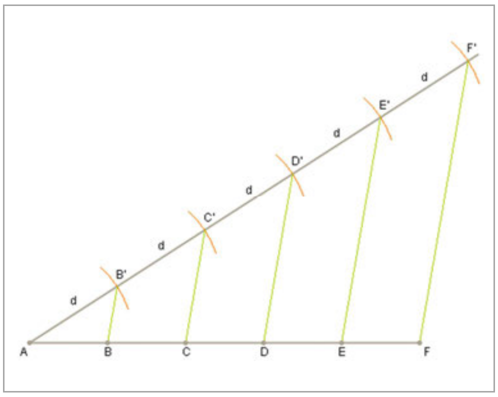
En dicha semirrecta tomamos, con ayuda del compás, cinco distancias iguales:



Ahora unimos la última marca sobre la semirrecta auxiliar con el extremo derecho del segmento (segmento F’F) y vamos trazando segmentos paralelos por el resto de marcas de división:



Como los segmentos AB’, B’C’, C’D’, D’E’ y E’F’ son iguales, según el teorema de Tales, también los segmentos AB, BC, CD, DE y EF son iguales, por lo que hemos dividido el segmento inicial en cinco partes iguales:

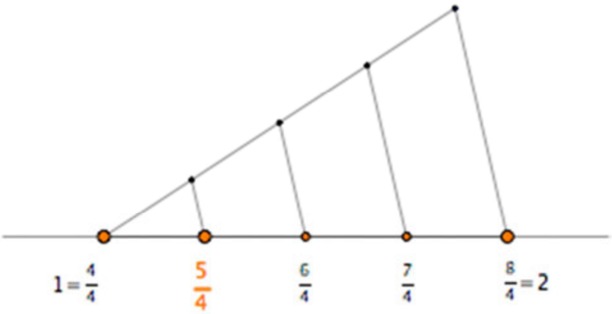


Representación de números fraccionarios

La división de un segmento en partes iguales es útil para representar en la recta los números fraccionarios. Por ejemplo, si queremos saber qué punto de la recta le corresponde a 5/4 nos fijamos entre qué dos números enteros está comprendido:

$$1 = \frac{4}{4} < \frac{5}{4} < \frac{8}{4} = 2$$

Ahora que sabemos que está comprendido entre 1 y 2, dividimos este segmento en cuatro partes iguales y localizamos 5/4:



Relaciona

Ahora inténtalo tú. Observa las figuras siguientes y relaciona cada una con el número que representa el punto de color azul:

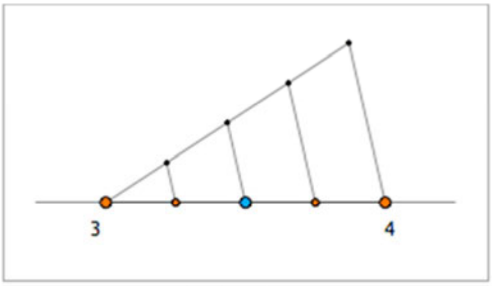


FIGURA A

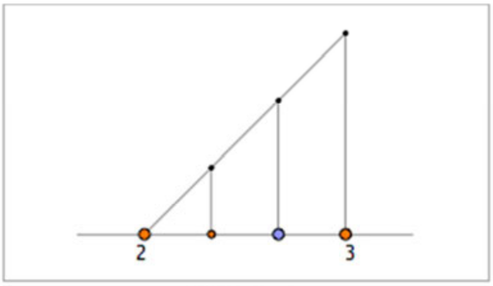


FIGURA B

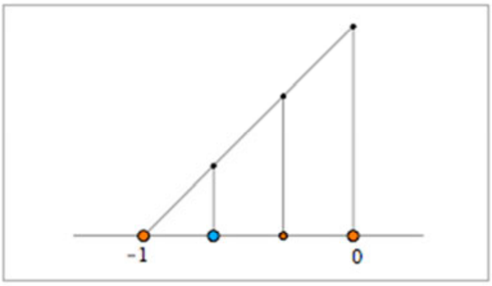


FIGURA C

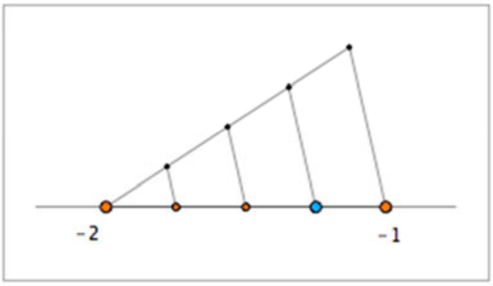
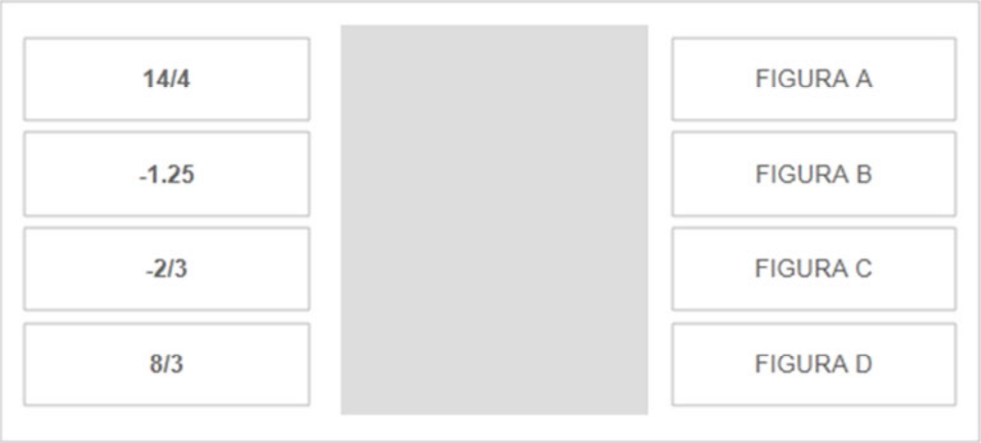


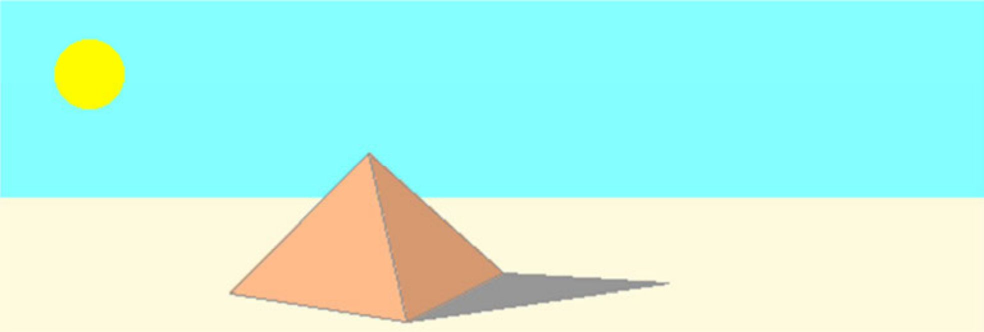
FIGURA D



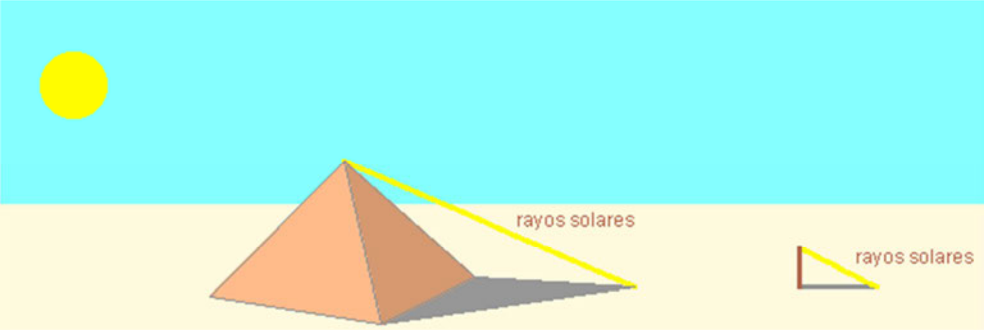
14/4		FIGURA A
-1.25		FIGURA B
-2/3		FIGURA C
8/3		FIGURA D

Tales y la gran pirámide

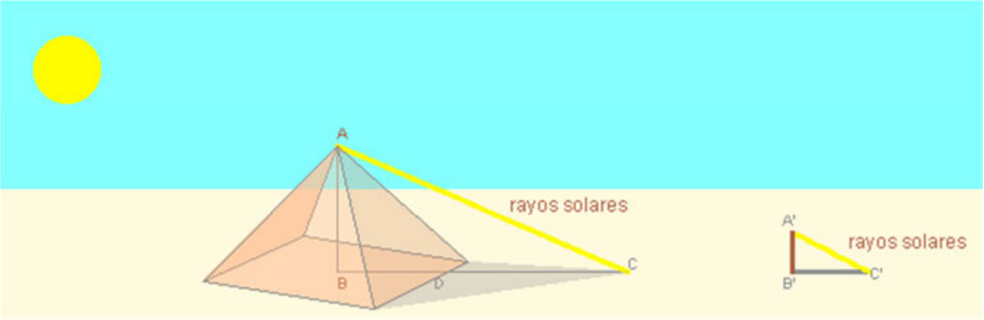
El teorema de Tales se utiliza frecuentemente para el cálculo de distancias inaccesibles. El mismo Tales lo ensayó para calcular la altura de la gran pirámide:



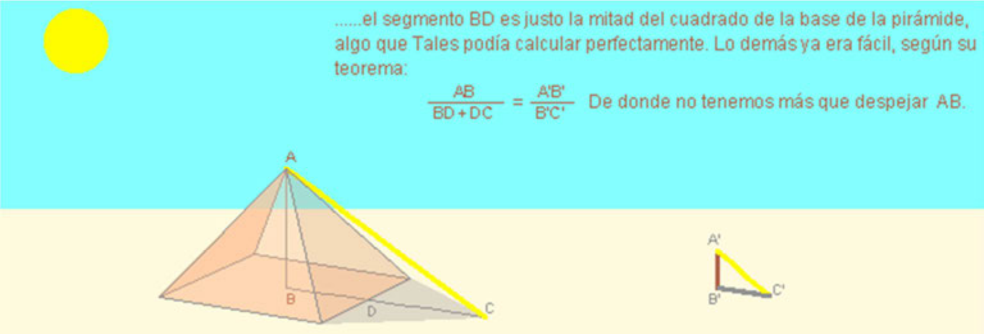
Tales clavó en la arena una estaca de longitud conocida y cuya sombra podía medir en cualquier momento:



El siguiente paso consistía en medir la sombra que la altura de la pirámide proyectaba sobre el suelo. De ese modo, se podría aplicar su teorema a los dos triángulos rectángulos semejantes ABC y A’B’C’:



Tales podía medir aproximadamente el segmento DC puesto que es visible, pero no tenía forma de de calcular el valor del segmento BD ya que queda dentro de la pirámide. Pero Tales sabía que la pirámide tiene orientación norte-sur. Por eso espero hasta el mediodía, justo cuando el Sol se encuentra al sur y entonces…



......el segmento BD es justo la mitad del cuadrado de la base de la pirámide, algo que Tales podía calcular perfectamente. Lo demás ya era fácil, según su teorema:

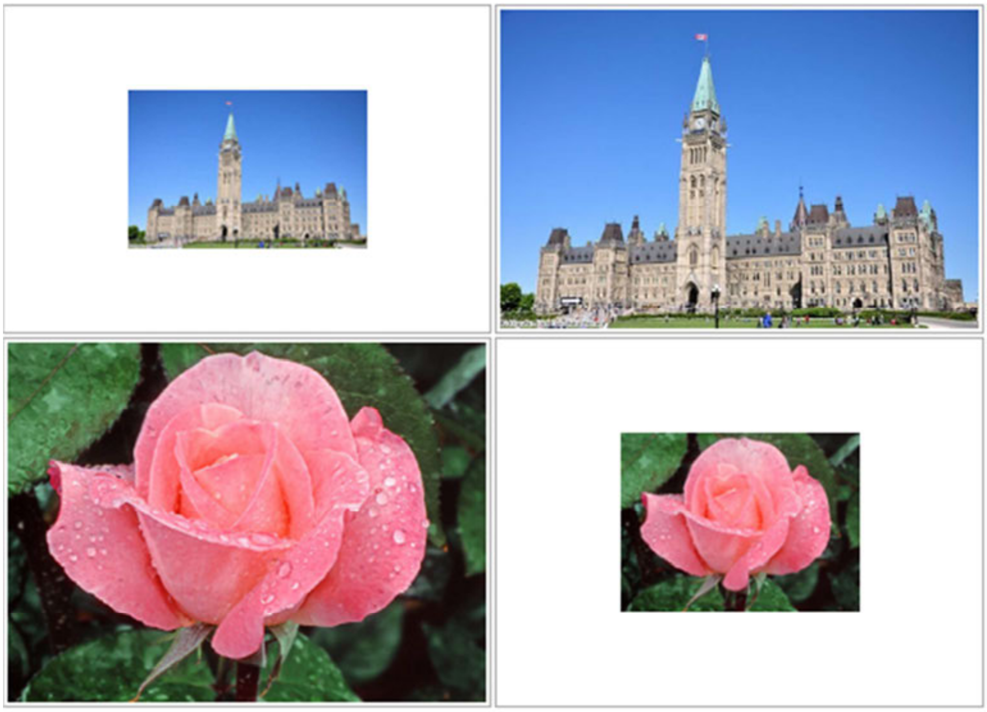
$$\frac{AB}{BD+DC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$ De donde no tenemos más que despejar AB.

4. Semejanza

Dos figuras son **semejantes** si tienen la **misma forma** e **igual o distinto tamaño**. La relación que hay entre los tamaños de dos figuras semejantes se llama **razón de semejanza**.

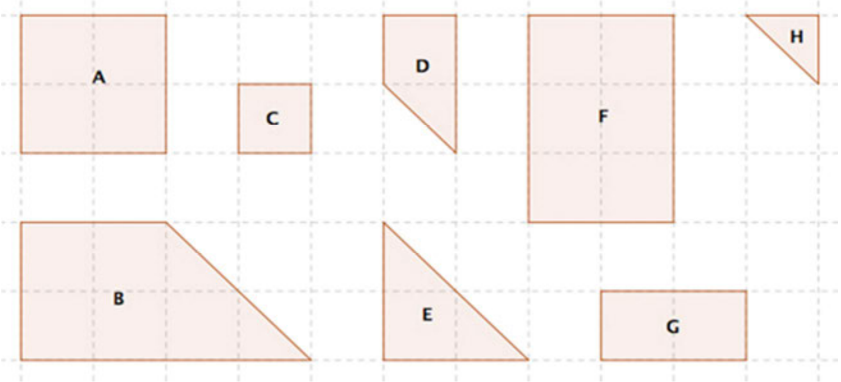
El concepto de semejanza es de uso muy frecuente en la vida ordinaria. Piensa en la foto de un cuadro, que es siempre una reducción del tamaño del mismo, en las ampliaciones de fotos originales, en mapas, planos de edificios, etc. Todos ellos son ejemplos de semejanza.

Observa estas dos parejas de fotos como ejemplos de semejanza. Puede considerarse que una es una reducción de la otra o al contrario. En el primer caso se trataría de una ampliación al doble, es decir la razón de semejanza sería igual a 2, mientras que en el segundo de una reducción a la mitad y la razón de semejanza sería igual a 1/2.



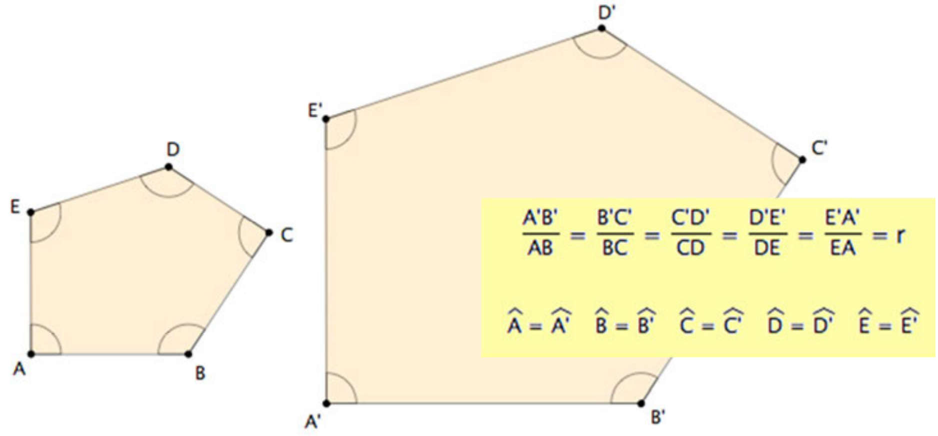
Elige las correctas

Observa las siguientes figuras poligonales y elige a continuación las parejas que te parezcan semejantes:



4.1. Polígonos semejantes

Dos polígonos son **semejantes** si todas sus **parejas de lados homólogos guardan la misma proporción** y sus **ángulos internos son iguales**:



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = r$$

$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad \hat{C} = \hat{C'} \quad \hat{D} = \hat{D'} \quad \hat{E} = \hat{E'}$$

Elige la correcta

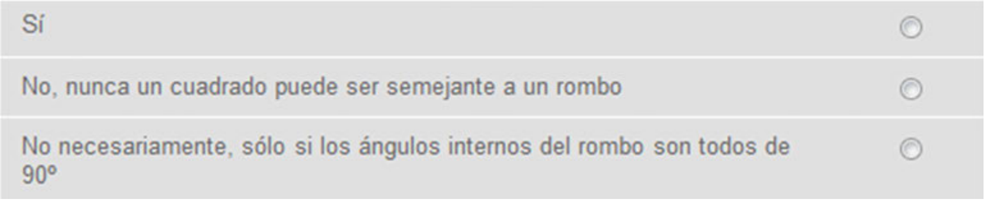
En un cuadrilátero los lados miden a=16 cm, b=18 cm, c=12 cm y d=22 cm. En un cuadrilátero semejante al anterior el lado c' mide 18 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza?


6 ○
1.5 ○
3 ○

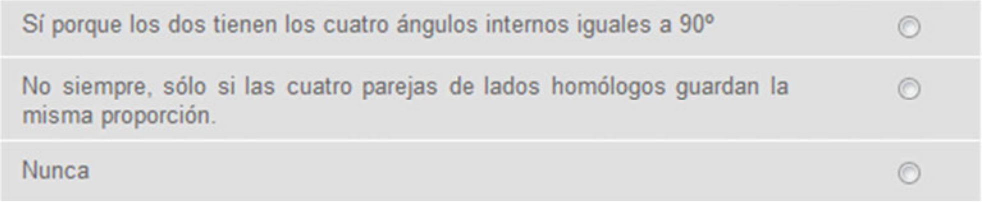
Los lados de un pentágono miden 5 dm, 45 cm, 30 cm, 20 cm y 25 cm. ¿Cuánto miden los lados de un pentágono semejante al anterior con razón de semejanza 3/5?


30, 27, 18, 12 y 15 cm respectivamente ○
3 dm, 27 cm, 18 cm, 12 cm y 1.5 m respectivamente ○
Este polígono no puede tener otro semejante ○

Un rombo (cuadrilátero cuyos lados son iguales) tiene sus lados iguales a 4 cm. Un cuadrado de lado igual a 16 cm es semejante al anterior con razón de semejanza 4. ¿Es cierta esta última afirmación?


Sí ○
No, nunca un cuadrado puede ser semejante a un rombo ○
No necesariamente, sólo si los ángulos internos del rombo son todos de 90º ○

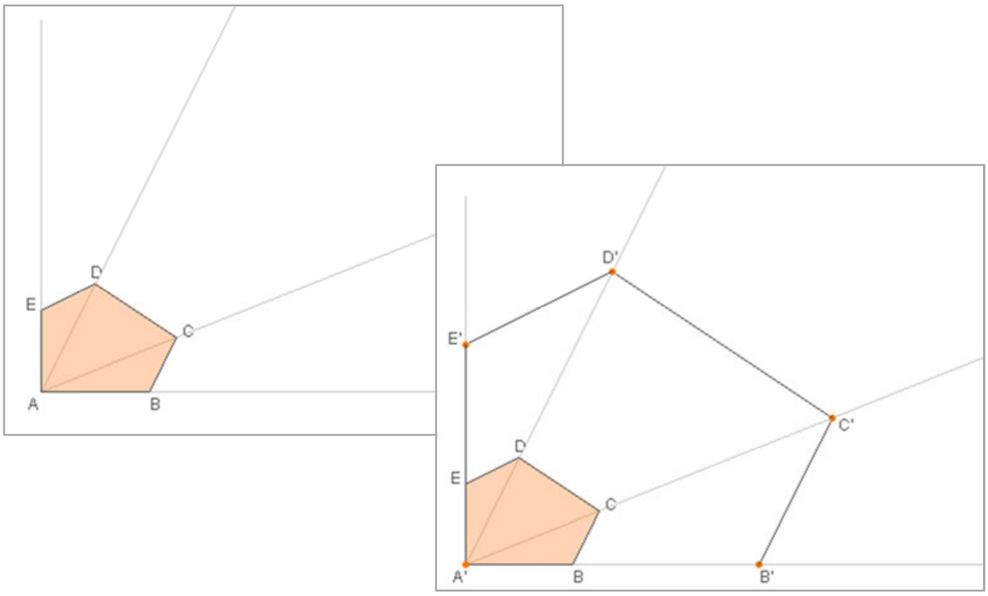
¿Dos rectángulos cualesquiera son semejantes?


Sí porque los dos tienen los cuatro ángulos internos iguales a 90º ○
No siempre, sólo si las cuatro parejas de lados homólogos guardan la misma proporción. ○
Nunca ○

Construcción de polígonos semejantes

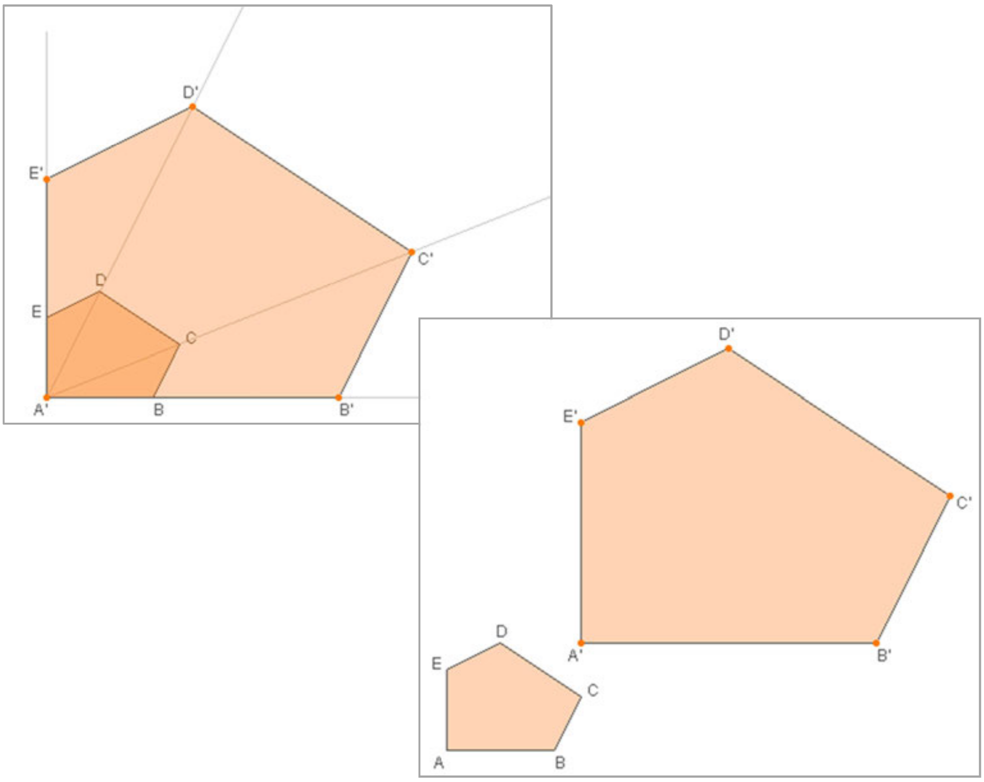
Veamos un procedimiento sencillo para construir un polígono semejante a uno dado. Luego puedes repetirlo en tu cuaderno, necesitarás escuadra y cartabón para trazar paralelas:

En primer lugar elegimos un vértice, por ejemplo A, y desde él trazamos semirrectas que pasen por los demás vértices:



Elegida una razón de semejanza, ***r***, marcamos el punto B' de modo que se cumpla ***AB' = r. AB***. A partir del punto B' vamos trazando paralelas a los lados del polígono inicial:

El polígono de vértices A', B', C', D' y E' es semejante al polígono de vértices A, B, C, D y E con razón de semejanza r.



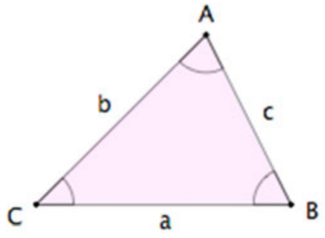
Podemos afirmar que todas las parejas de lados homólogos guardan la misma proporción gracias al teorema de Tales.

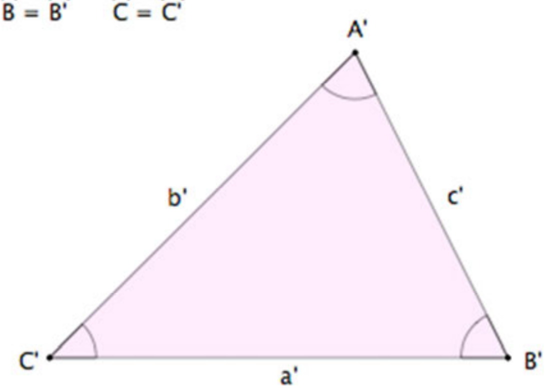
4.2. Triángulos semejantes

Los triángulos son polígonos de tres lados, por lo tanto dos triángulos serán semejantes si satisfacen las condiciones que hemos visto en el apartado anterior, es decir, sus tres parejas de lados homólogos son proporcionales y sus tres parejas de ángulos internos son iguales.

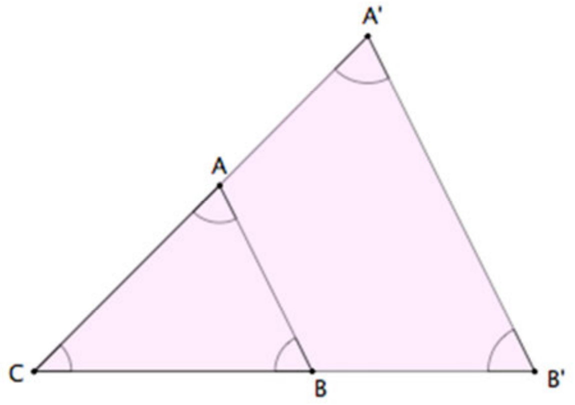
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \qquad \widehat{B} = \widehat{B'} \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$





Sin embargo en los triángulos se da la peculiaridad de que si se cumple una de las dos condiciones también se cumple la otra. En cualquiera de los dos casos los triángulos se podrán poner en **posición de Tales** lo que garantiza que serán semejantes.

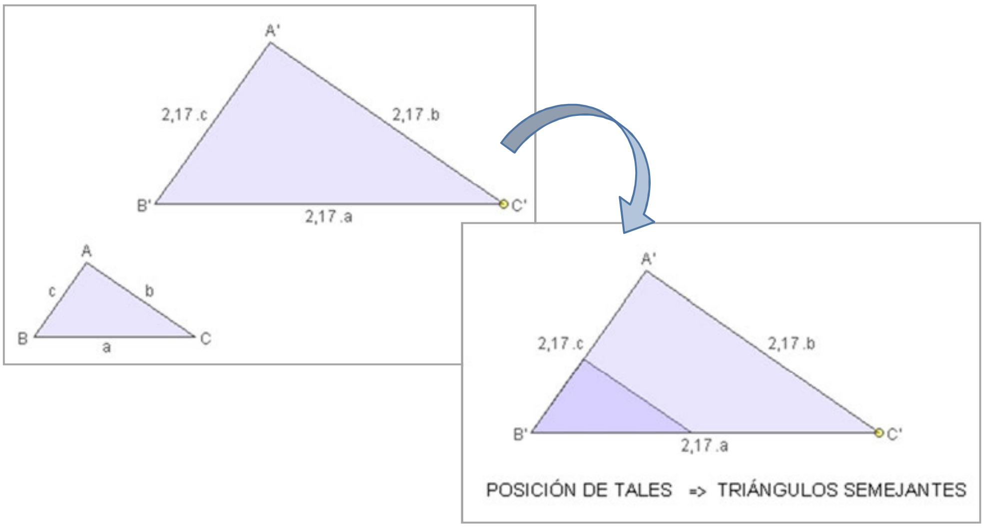


Criterios de semejanza de triángulos

Podemos aprovechar lo que hemos visto en el párrafo anterior mediante los llamados criterios de semejanza de triángulos. Son tres, y según los datos conocidos de los triángulos podemos aplicar uno u otro:

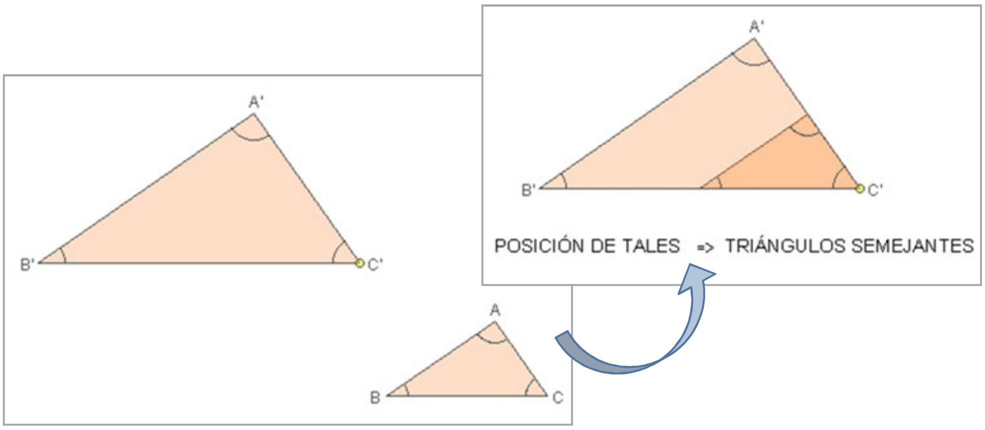
Primer criterio de semejanza

Si las **tres parejas de lados guardan la misma proporción**, los triángulos son semejantes:



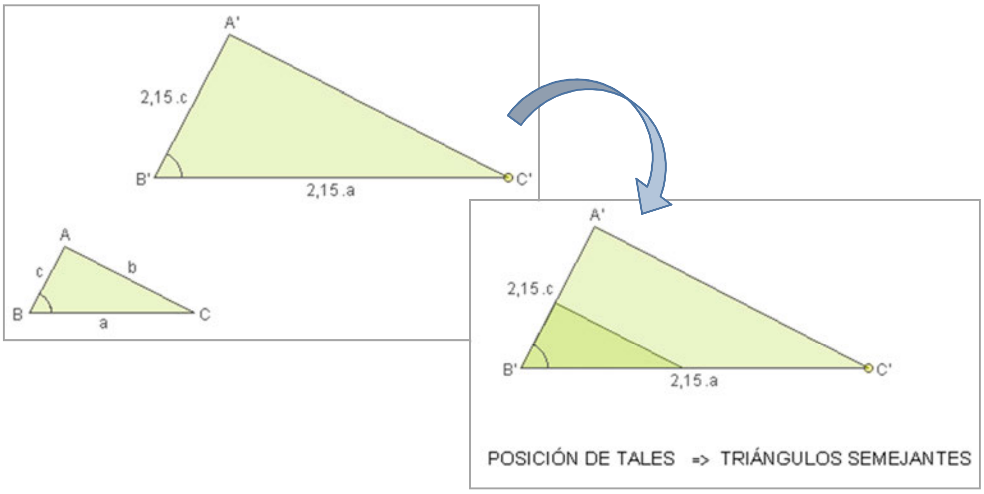
Segundo criterio de semejanza

Si **las tres parejas de ángulos homólogos son iguales**, los triángulos son semejantes. En realidad, es suficiente con que coincidan dos parejas ya que los ángulos de la tercera pareja serán iguales a lo que falte hasta 180º:



Tercer criterio de semejanza

Si **dos parejas de lados homólogos guardan la misma proporción y el ángulo que forman dichos lados es igual**, los triángulos son semejantes:



Relaciona

Observa los siguientes triángulos y, basándote en los criterios de semejanza, busca las cinco parejas de triángulos semejantes:

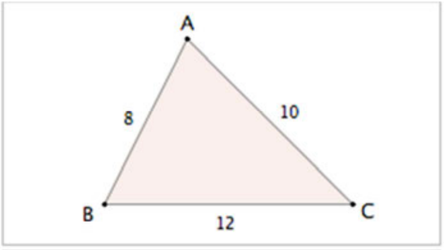


FIGURA A

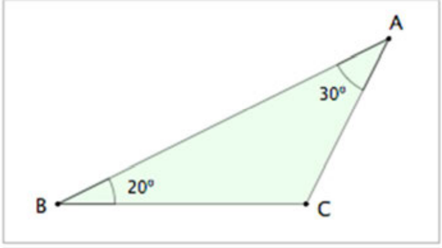


FIGURA B

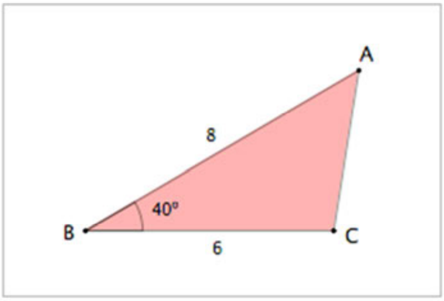


FIGURA C

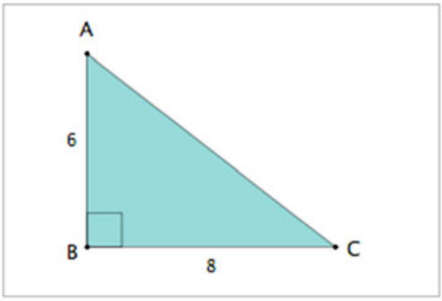


FIGURA D

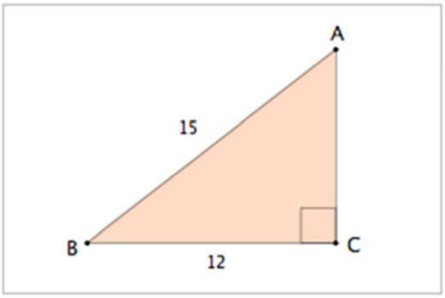


FIGURA E

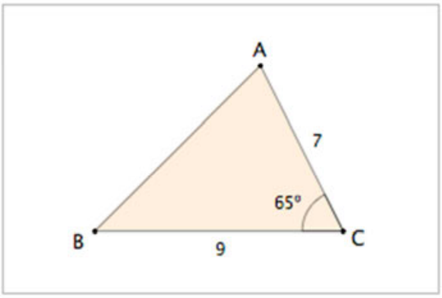


FIGURA F

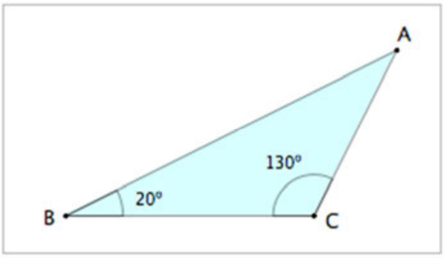


FIGURA G

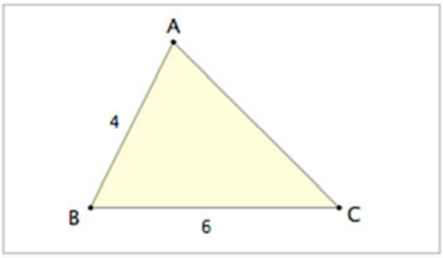


FIGURA H

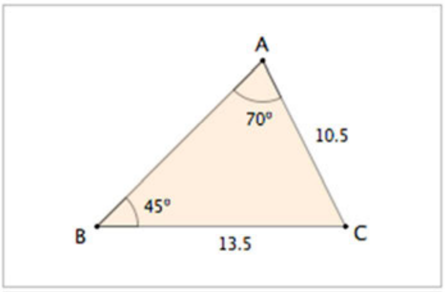


FIGURA I

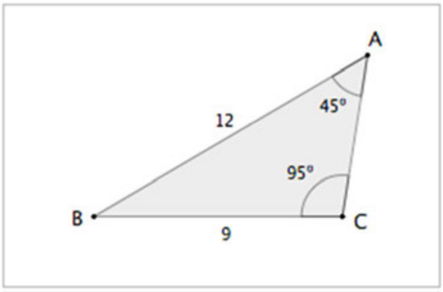


FIGURA J

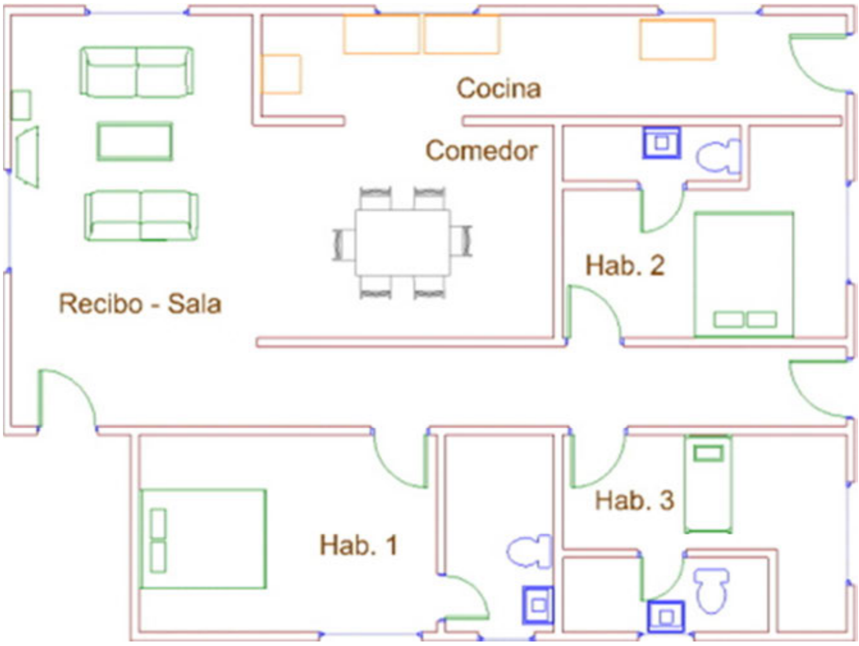
5. Escalas

Una de las aplicaciones más interesantes de la semejanza la encontramos en la representación de la realidad mediante el concepto de **escala**. Utilizamos esta aplicación con frecuencia en planos y mapas.

Llamamos **escala** al cociente entre la medida de una representación de la realidad y su medida real. Por ejemplo, cuando hablamos de escala 1:100 queremos decir que una unidad en la imagen, un plano por ejemplo, equivale a 100 unidades en la realidad.

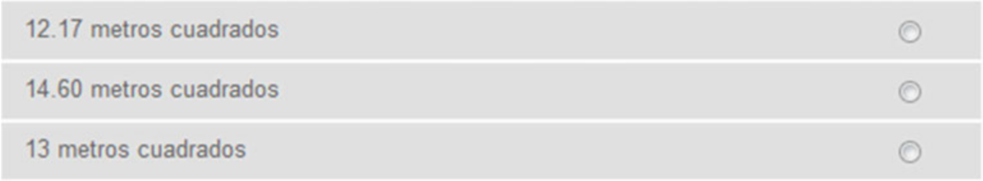
Veamos unos ejemplos en los que puedes practicar:

- El siguiente plano está a escala **1:120**. Con la regla, comprueba que la cocina tiene 7.7 cm. de largo, es decir 7.7x120 = 924 cm. o 9.24 metros. Su ancho, compruébalo, es de 1.3 cm. es decir, 1.3x120 = 156 cm. o 1.56 metros. En consecuencia, la superficie de la cocina es: 9.24x1.56 = 14.41 m^2 (metros cuadrados)



Elige la correcta

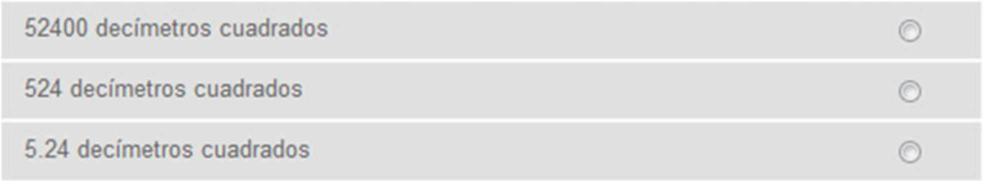
La superficie de la habitación 1 (sin contar el baño interior) es:


12.17 metros cuadrados ○
14.60 metros cuadrados ○
13 metros cuadrados ○

La superficie de la habitación 2 es:


149.2 decímetros cuadrados ○
1492 centímetros cuadrados ○
149200 centímetros cuadrados ○

La superficie del baño interior a la habitación 1 es:


52400 decímetros cuadrados ○
524 decímetros cuadrados ○
5.24 decímetros cuadrados ○

Vamos

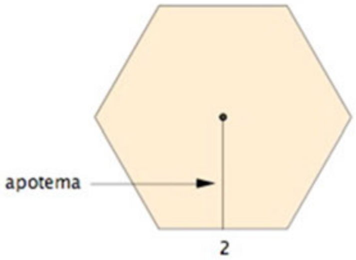
En la ciudad de Zaragoza pronto dispondremos de tranvía, pero de momento para recorrer distancias largas hemos de conformarnos con tomar el autobús. Hemos decidido que aquellas distancias menores a 1.5 Km. las cubriremos andando y las que sean mayores en autobús.

El plano de la figura inferior está a una escala **2:50000**, es decir que 2 centímetros equivalen a 50000 centímetros o 500 metros. Responde pues cómo haremos los siguientes recorridos, "**andando**" o "**en bus**". Utiliza una regla para medir las distancias en el plano.

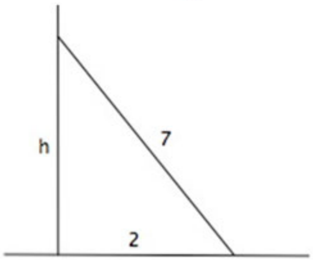
	Verdadero	Falso
Desde el palacio de la Aljafería hasta el Parque Miraflores iremos andando	○	○
De la Universidad al hospital Miguel Servet iremos andando	○	○
Desde el Mercado Torresol hasta el Parque Pignatelli cogeremos el bus	○	○
Entre el polígono Cogullada y La Seo tomaremos un bus	○	○
Desde el hospital Clínico Lozano Blesa hasta el hospital Miguel Servet iremos andando	○	○

Ejercicios

1. *Calcula la apotema de un hexágono regular de lado 2 cm.*

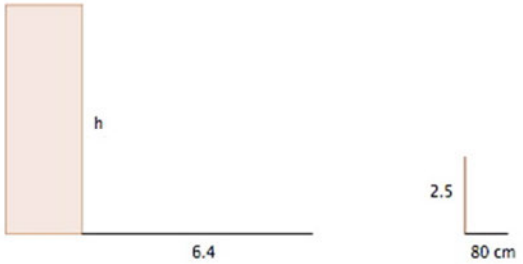


2. *Una escalera de 7 metros de longitud está apoyada en una pared. El pie de la escalera está situado a una distancia de 2 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera?*

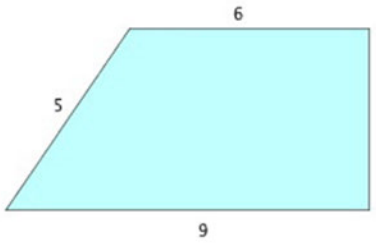


3. *Los lados de un triángulo miden 6, 9 y 11 cm. ¿Se trata de un triángulo rectángulo?*

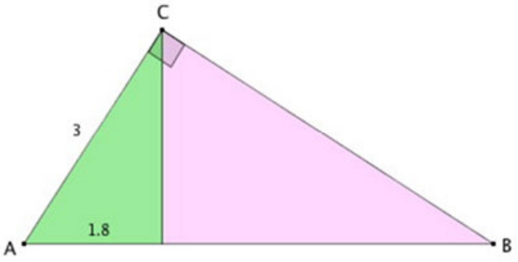
4. *A la misma hora que un poste de 2.5 m. de altura proyecta una sombra de 80 cm. un edificio proyecta una sombra de 6.4 m. ¿Qué altura tiene dicho edificio?*



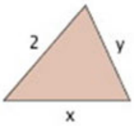
5. *Calcular el perímetro del trapecio de la figura:*

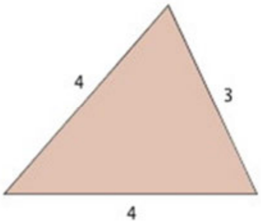


6. *Calcular el cateto* $\overline{BC}$ *y la hipotenusa* $\overline{AB}$ *en el siguiente triángulo rectángulo:*

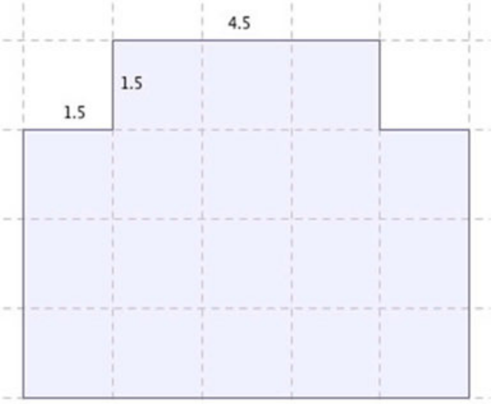


7. *Calcular “x” e “y” en la siguiente pareja de triángulos semejantes:*





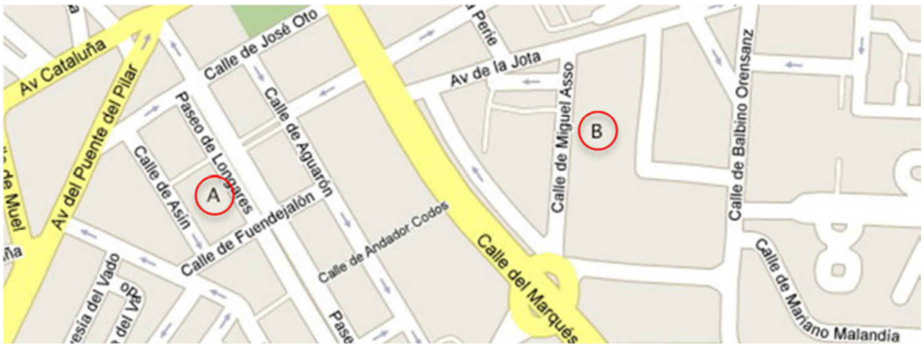
8. *Sabemos que esta parcela esta dibujada en centímetros, a escala 1:1750. Calcula cuántos metros de valla necesitamos para cercarla.*



9. *Observa el siguiente plano de una parte de la provincia de Madrid:*

Hemos medido en línea recta, y en centímetros, la distancia entre Coslada y Torrejón de Ardoz, 4,7 centímetros y la distancia entre Alcalá de Henares y Daganzo de Arriba, 6,4 centímetros. ¿Cuáles serán las distancias reales?. Fíjate en la escala que viene dibujada en la parte inferior derecha.

10. *En esta pequeña porción del plano de Zaragoza, desde el punto A hasta el punto B hay 7,8 cm. ¿A qué escala está hecho el plano si la distancia real es de 1170 metros?.*



Cuerpos geométricos

5

En la naturaleza o construidos por el ser humano vemos objetos con ciertas características comunes: una torre, una caja de zapatos, un bote de conserva, un balón, un cristal de cuarzo, las pirámides de Egipto,... todos ellos son cuerpos geométricos, en unos casos están limitados por caras planas y en otros son "redondos". A lo largo de la Historia se han agrupado y clasificado estos cuerpos por su forma olvidando otro tipo de propiedades.

En esta unidad vas a estudiar este tipo de cuerpos de la Geometría, conocer sus propiedades, y calcular su superficie y volumen.

Para entender bien esta unidad necesitas saber aplicar el Teorema de Pitágoras que has estudiado en la unidad anterior y recordar las áreas de las figuras planas, que se vieron en el Bloque 1. Aquí se hace un breve recordatorio de las que vas a emplear, pero si necesitas repasarlas más puedes hacerlo desde este enlace.

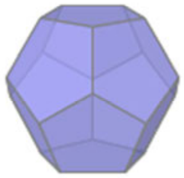
Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

- *Reconocer los poliedros que ves en la naturaleza y en las construcciones humanas. Clasificarlos y determinar sus elementos.*
- *Distinguir y nombrar los poliedros regulares convexos.*
- *Diferenciar y describir los cuerpos redondos de revolución, cilindro, cono y esfera, y sus elementos.*
- *Buscar regularidades y relaciones entre figuras planas y espaciales, desarrollando cuerpos geométricos.*
- *Calcular la superficie de los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos.*
- *Comprender el concepto de medida del volumen y manejar las unidades de medida del sistema métrico decimal.*
- *Calcular el volumen de los cuerpos geométricos básicos: prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.*

1. Poliedros

Observa los **cuerpos geométricos** siguientes, presentan formas muy diversas pero todos tienen algo en común, por cualquier lado que se miren vemos polígonos, todos están limitados por caras planas, por polígonos, son **poliedros**.

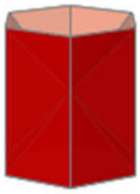
A



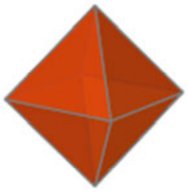
B

C

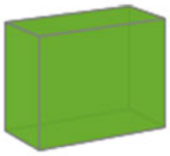
D



E



F



- Los **poliedros** son cuerpos geométricos limitados por polígonos.

  Hay dos tipos importantes de poliedros, **cóncavos** y **convexos**. Un poliedro es convexo si al colocarlo sobre una superficie plana se puede apoyar sobre cualquiera de sus caras, mientras que un poliedro cóncavo tiene varias caras que no la tocan. Aquí nos ocuparemos sobre todo de los poliedros convexos.

Selecciona

Los poliedros convexos de la figura anterior.

Elementos de un poliedro

A los polígonos que limitan un poliedro se les llama **caras**. La misma palabra *poliedro* deriva del griego y quiere decir *muchas (poli) caras (edron)*.

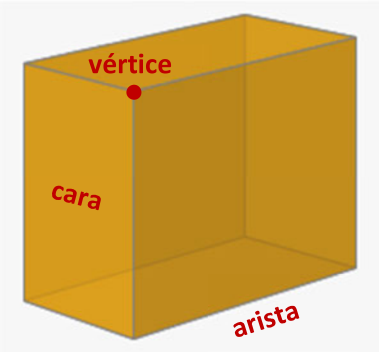
Además de las caras en todo poliedro podemos distinguir:

- Las **aristas**, segmentos en que se intersecan o cortan dos caras.
- Los **vértices**, puntos en que se cortan las aristas.

Y también:

- Ángulos diedros, son los formados por dos caras.
- Ángulos poliedros, formados por tres o más caras.

Observa en la figura estos elementos.



La relación de Euler

Entre el número de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo existe cierta relación. El poliedro de la figura tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, si a la suma del número de caras y vértices le restamos el de aristas el resultado es 2.

$$6 + 8 - 12 = 2$$

Esto ocurre con cualquier poliedro convexo, la suma del número de caras más el de vértices, menos el número de aristas es siempre dos. Se expresa:

C + V - A = 2 o bien **C + V = A + 2**

Este resultado se conoce como fórmula o teorema de Euler, ya que fue Leonhard Euler, matemático suizo del siglo XVIII el primero en enunciarlo. Puedes comprobar que se cumple en los poliedros convexos de la página anterior.

más...

Leonhard Euler

Leonhard Euler, (1707-1783), es una de las figuras más importantes de la historia de las Matemáticas. Nació en Basilea (Suiza) y a los 26 años era profesor de Matemáticas de la Academia de San Petersburgo. En 1735 perdió la vista del ojo derecho y en 1771 quedó ciego, pero continuó igualmente con sus investigaciones. A lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos.

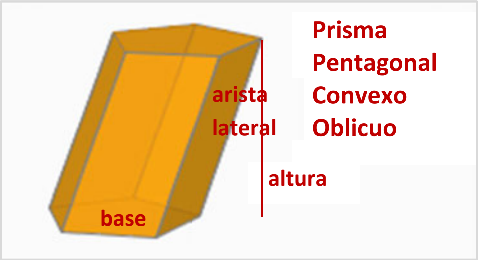
1.1. Prismas

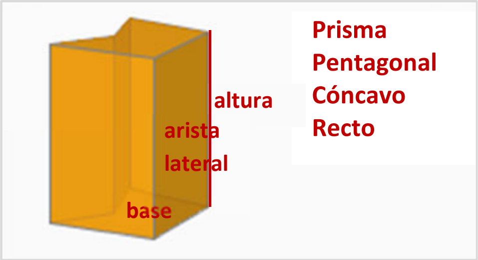
Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras iguales y paralelas, llamadas **bases**, y el resto de sus **caras laterales** son paralelogramos.

Según el tipo de polígono que sean las bases los prismas se llaman triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales (o hexagonales), etc.

También pueden ser **cóncavos** o **convexos** según sean los polígonos de las bases; y **rectos** si las caras laterales son perpendiculares a las bases u **oblicuos** si no lo son.

En la imagen puedes observar distintos tipos de prismas y sus elementos.





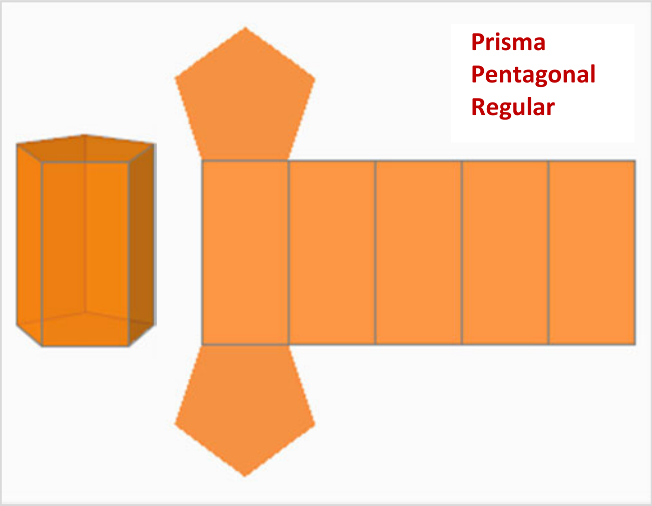
Prismas regulares

- Un prisma es **regular** si es recto y las bases son polígonos regulares.

Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos todos iguales.

Todos los prismas son **desarrollables**, es decir, sus caras se pueden desplegar en un plano y volver a plegar para construir el prisma.

El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y un rectángulo dividido en tantas partes como número de caras laterales.



Paralelepípedos

Los paralelepípedos son un tipo especial de prismas en los que todas sus caras son paralelogramos.

Como las bases también son paralelogramos se trata de prismas cuadrangulares que pueden ser rectos u oblicuos.

Probablemente son los poliedros que más acostumbramos a ver en la vida diaria, una caja de zapatos, un envase de zumo, un libro tienen forma de paralelepípedo.

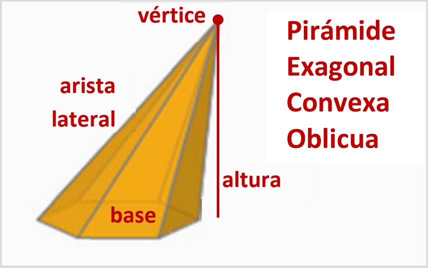
- Cuando todas las caras son rectángulos el paralelepípedo se denomina **ortoedro**, que significa que todas las caras son perpendiculares.
- Un caso particular del ortoedro es el **cubo**, en el que todas las caras son cuadrados.
- Si todas las caras son **rombos**, y por tanto todas iguales, el paralelepípedo se llama **romboedro**.

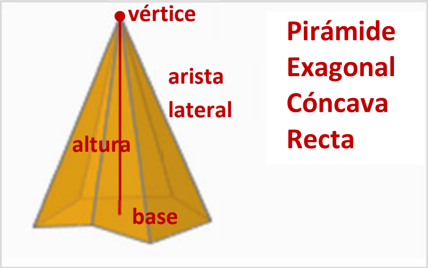
1.2. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro que tiene por **base** un polígono cualquiera, y por **caras laterales** triángulos con un vértice común, que se llama **vértice** de la pirámide.

La **altura** de la pirámide es la distancia entre el vértice y la base.

Una pirámide puede ser triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. dependiendo del tipo de polígono que sea la base. También puede ser cóncava o convexa y recta u oblicua.





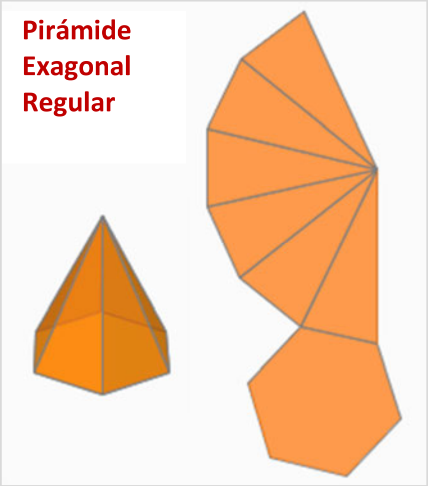
Pirámides regulares

- Una pirámide es **regular** si es recta y su **base** es un **polígono regular**.

Las **caras laterales** de una pirámide regular son **triángulos isósceles**, todos iguales.

La altura de cada uno de estos triángulos se llama **apotema** de la pirámide, no hay que confundirla con la apotema del polígono de la base.

Como los prismas las pirámides también son desarrollables, sus caras pueden dibujarse en un plano y mediante pliegues se puede construir dicha pirámide.



1.3. Poliedros regulares

Los **poliedros regulares** son los que cumplen estas dos condiciones:

- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

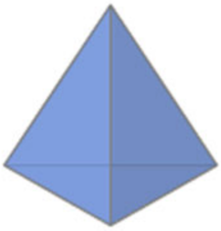
Con estas condiciones sólo se pueden construir cinco poliedros regulares convexos, que puedes ver a continuación.

- Con triángulos equiláteros: Tetraedro, Octaedro e Icosaedro.
- Con cuadrados: Exaedro, más conocido como cubo.
- Con pentágonos regulares: Dodecaedro

Tetraedro

En cada vértice inciden 3 triángulos.

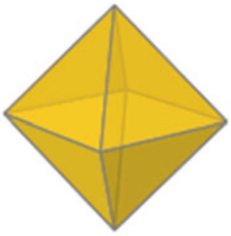
- 4 caras
- 4 vértices
- 6 aristas



Octaedro

En cada vértice inciden 4 triángulos.

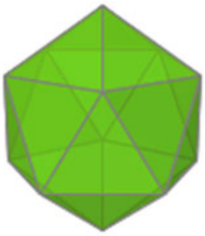
- 8 caras
- 6 vértices
- 12 aristas



Icosaedro

En cada vértice inciden 5 triángulos.

- 20 caras
- 12 vértices
- 30 aristas



Exaedro o cubo

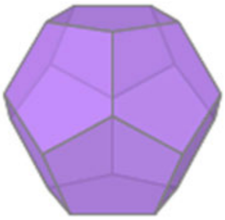
En cada vértice inciden 3 cuadrados.

- 6 caras
- 8 vértices
- 12 aristas

Dodecaedro

En cada vértice inciden 3 pentágonos.

- 12 caras
- 20 vértices
- 30 aristas



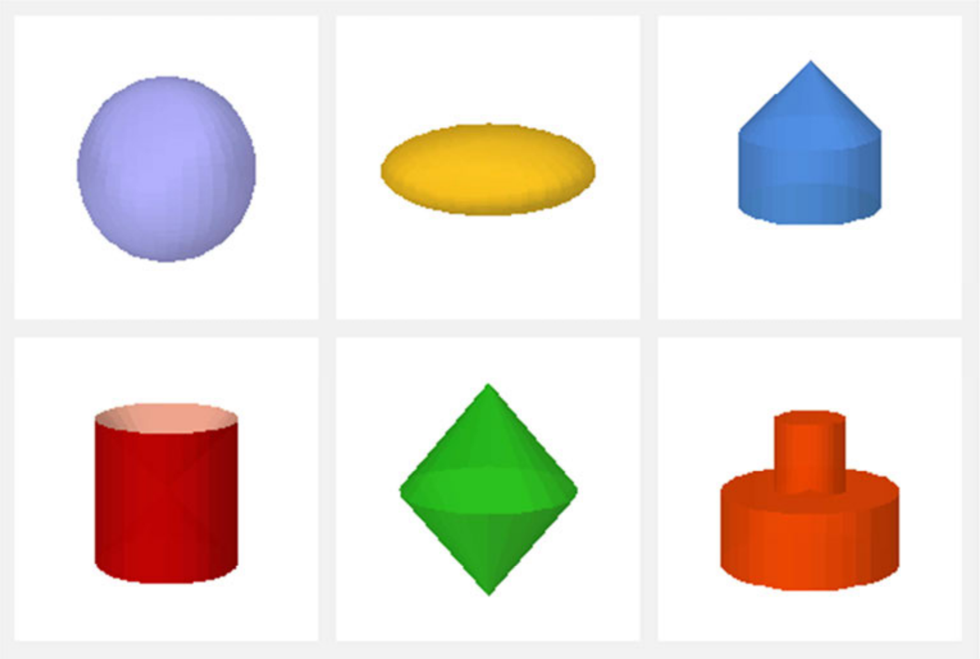
más…

Sólidos Platónicos

Los cinco poliedros regulares son conocidos también como sólidos platónicos por la descripción que de ellos hace el filósofo griego Platón, llegándoles a atribuir propiedades mágicas. Timeo en el diálogo de Platón dice: *«El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado ésta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo»*

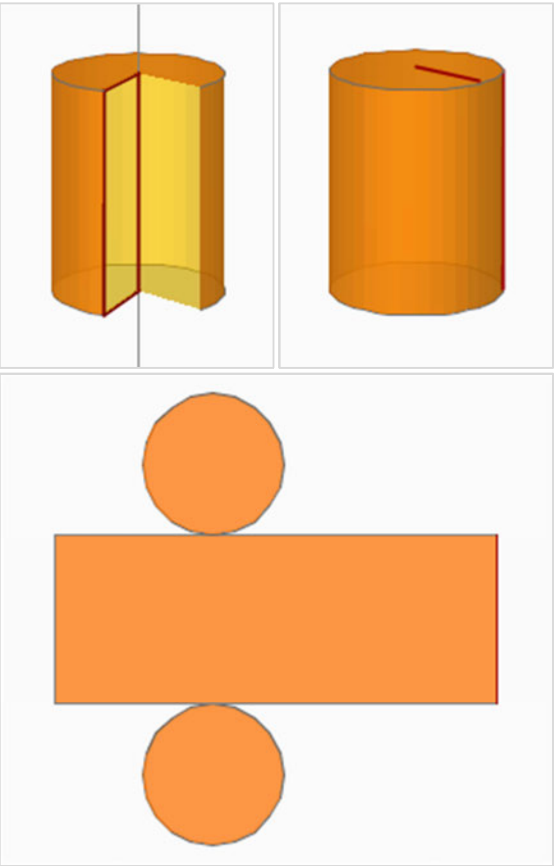
2. Cuerpos de revolución

¿Qué tienen en común los siguientes cuerpos geométricos?. La superficie lateral de todos ellos es curva, incluso algunos tienen toda su superficie curva. Son **cuerpos redondos**.



Los cuerpos redondos que vamos a ver en este tema son el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**, todos ellos se dice que son **cuerpos de revolución** ya que se originan al girar una superficie plana alrededor de un eje, dando una vuelta completa.

2.1. Cilindros



Un **cilindro** recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

El **eje de rotación** es la recta sobre la que se sitúa el lado sobre el que gira y el lado paralelo a él es la **generatriz**.

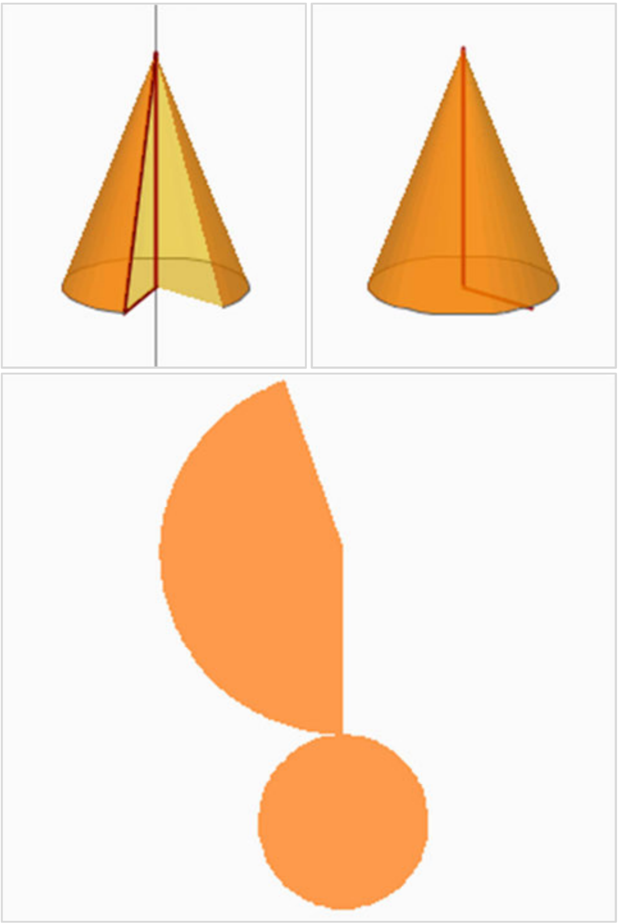
En un cilindro distinguimos la superficie lateral y dos bases que son dos círculos iguales. El **radio** de estos círculos es el del cilindro.

La **altura** del cilindro es la distancia entre las dos bases, que en el caso de un cilindro recto coincide con la generatriz.

La superficie del cilindro es desarrollable en el plano, este desarrollo como puedes ver en la imagen se compone de:

- Un rectángulo que es la superficie lateral.
- Dos círculos, uno por cada base, cuyo radio es el del cilindro.

2.2. Conos



Un **cono** recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El **eje de rotación** es la recta sobre la que se sitúa el lado sobre el que gira y la hipotenusa es la **generatriz**.

En un cono distinguimos la superficie lateral y una base que es un círculo. El punto en que se corta la generatriz y el eje de rotación es el **vértice**.

La **altura** del cono es la distancia entre el vértice y la base.

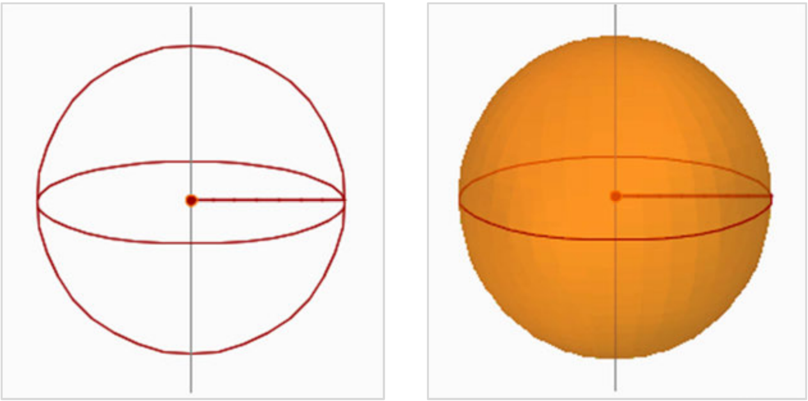
La superficie del cono es desarrollable en el plano, este desarrollo como puedes ver en la escena se compone de:

- Un **sector circular** que es la superficie lateral.
- Un **círculo** que corresponde a la base.

2.3. Esferas

Al girar un círculo (o un semicírculo) sobre uno de sus diámetros genera una **esfera.**

La recta sobre la que se sitúa el diámetro es el eje de revolución y la circunferencia (o semicircunferencia) la generatriz.



El **centro** y el **radio** de la esfera son los mismos que los del círculo que la genera.

El radio coincide con la distancia del centro a cualquier punto de la superficie de la esfera. Esta propiedad caracteriza a la esfera que es el *conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, el centro.*

A diferencia de los cuerpos geométricos vistos anteriormente la esfera **no es desarrollable**.

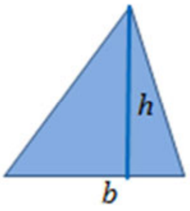
3. Áreas de los cuerpos geométricos

El área de los poliedros es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman. Para calcular áreas de poliedros usaremos sus desarrollos, ya que resulta más sencillo transformándolos en figuras planas. Lo mismo haremos con cilindros y conos, con la esfera no sirve este método ya que como sabes no es desarrollable.

En el Módulo I has estudiado las áreas de los polígonos y del círculo, si no las recuerdas bien conviene que las repases.

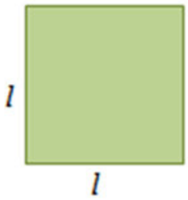
Aquí tienes un resumen con las que vas a utilizar en este tema.

Área del TRIÁNGULO



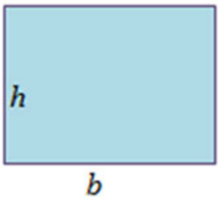
$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Área del CUADRADO



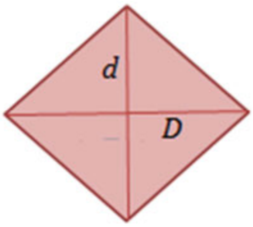
$$\text{Área} = l \cdot l = l^2$$

Área del RECTÁNGULO



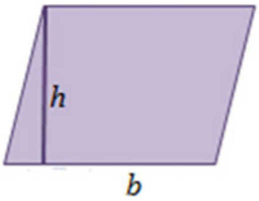
$$\text{Área} = b \cdot h$$

Área del ROMBO



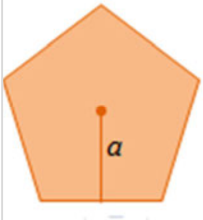
$$\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área del ROMBOIDE



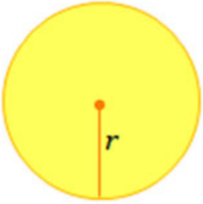
$$\text{Área} = b \cdot h$$

Área de un POLÍGONO REGULAR



$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot a}{2}$$

Área del CÍRCULO



$$\text{Área} = \pi r^2$$

3.1. Áreas de poliedros

Área de los prismas

El área de un prisma es la suma del área de todas sus caras, para calcularla basta recordar el desarrollo del prisma.

Aquí nos vamos a limitar a calcular áreas de prismas regulares y paralelepípedos, en cuyo caso el desarrollo es un **rectángulo**, formado por las caras laterales y que es el **área lateral** del prisma, y los dos **polígonos de las bases**.

Área lateral = Perímetro de la base·altura
Área total = Área lateral + 2·Área de la base

Ejemplos

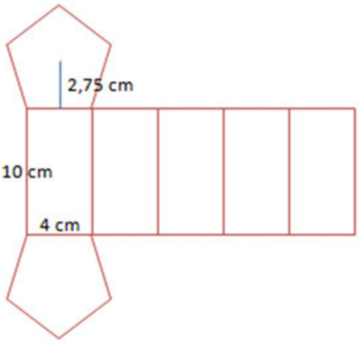
- *Área total de un prisma pentagonal regular de altura 10 cm, arista de la base 4 cm y apotema de la base 2,75 cm.*

  Perímetro de la base = 5·4 = 20 cm

  ***Área lateral** = 5·4·10 = 200 cm^2*

  ***Área base** = perímetro·apotema/2 =*
  = 5·4·2,75/2 =27,5 cm^2

  ***Área total** = 200 + 2·27,5 = 255 cm^2*



- *Área total de un prisma exagonal regular de altura 15 cm y arista de la base 6 cm.*

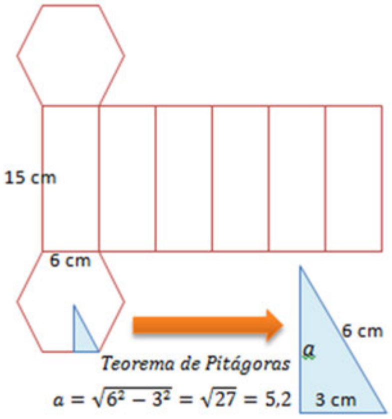
  Perímetro de la base = 6·6 = 36 cm

  ***Área lateral** = 6·6·15 = 540 cm^2*

  La base es un exágono regular, para calcular la apotema se aplica el Teorema de Pitágoras.

  ***Área base** = perímetro·apotema/2 =*
  = 6·6·5,2/2 =93,6 cm^2

  ***Área total** = 540 + 2·93,6 = 727,2 cm^2*

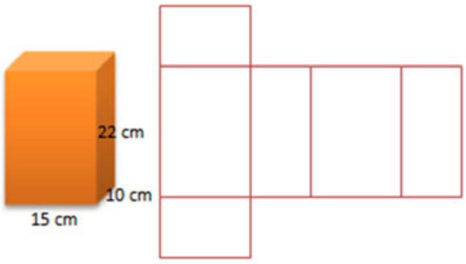


- *Área total de un paralelepípedo de dimensiones: largo 15 cm, ancho 10 cm y alto 22 cm.*

  Si observamos el desarrollo vemos que está formado por seis rectángulos:

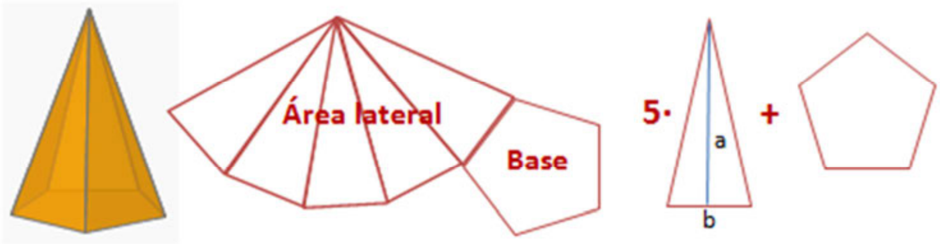
  - *dos de 15 cm x 22 cm,*
  - *dos de 10 cm x 22 cm,*
  - *y dos de 15 cm x10 cm*

  ***Área total** =*
  2·15·22+2·10·22+2·15·10 = 1400 cm^2



Área de las pirámides

Como en los prismas el área de una pirámide es la suma de las áreas de sus caras. Recuerda que el desarrollo de una pirámide regular está formado por tantos triángulos isósceles como lados tiene el polígono de la base y ese polígono base.



En una pirámide regular en que la base sea un polígono regular de n lados:

Área lateral = n·b·a/2 = perímetro de la base · apotema/2
Área total = Área lateral + Área base

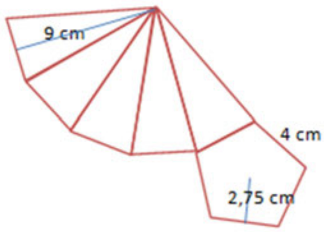
Ejemplos

- *Área de una pirámide pentagonal de apotema 9 cm, lado de la base 4 cm y apotema de la base 2,75 cm.*

  Área lateral *= 5·4·9/2 =90 cm²*

  Área *base = 5·4·2,75/2 = 27,5 cm²*

  Área *total = 90 + 27,5 = 117,5 cm²*



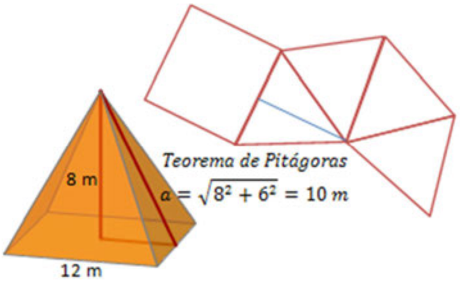
- *Área de una pirámide recta de 8 m de altura y cuya base es un cuadrado de lado 12 m.*

  Se aplica el Teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo o apotema de la pirámide.

  Área lateral *= 4·12·10/2 = 240 m²*

  Área base *= 12·12 = 144 m²*

  Área total *= 240 + 144 = 384 m²*



Comprueba

1. $A_{lateral} = 800\ cm^2$
   $A_{total} = 100\ cm^2$
2. $A_{lateral} = 792\ cm^2$
   $A_{total} = 896{,}84\ cm^2$
3. $A_{lateral} = 1622\ cm^2$
   $A_{total} = 2559{,}65\ cm^2$
4. $A_{lateral} = 362{,}24\ cm^2$
   $A_{latal} = 424{,}58\ cm^2$

Practica

1) *Calcula el área lateral y total de un prisma cuadrangular regular de altura 20 cm y arista de la base 10 cm.*

2) *Calcula el área lateral y total de un prisma triangular regular de altura 24 cm y arista de la base 11 cm.*

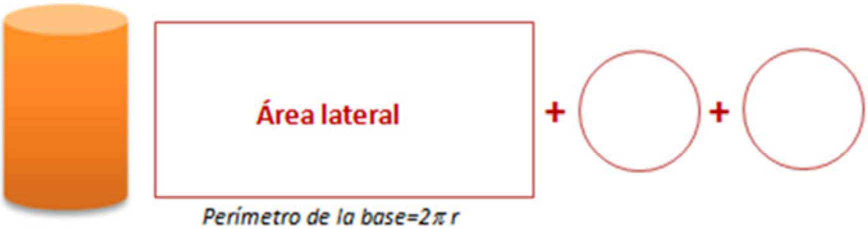
3) *Calcula el área lateral y total de una pirámide exagonal regular de arista lateral 30 cm y arista de la base 19 cm.*

4) *Calcula el área lateral y total de una pirámide triangular regular de arista lateral 21 cm y arista de la base 12 cm.*

3.2. Área de los cuerpos redondos

Área del cilindro

El desarrollo de un cilindro es un rectángulo y dos círculos que son las bases. El área lateral, la del rectángulo es base×altura, la base es el perímetro de la base del cilindro y la altura la del cilindro.



***Área lateral* = $2\pi r \cdot g$**

***Área total* = *Área lateral* + 2·*Área de la base* = $2\pi r \cdot g + 2\pi r^2$**

Ejemplo

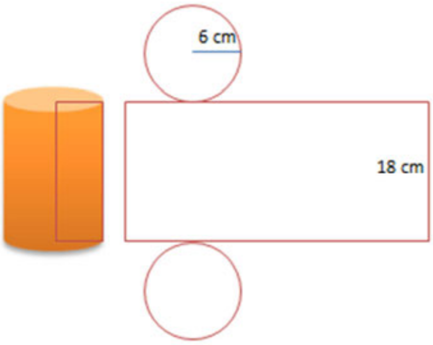
- *Un rectángulo de dimensiones 6x18 cm gira alrededor de su lado mayor, ¿cuál es el área del cilindro que genera?.*

  Perímetro de la base $=2\cdot\pi\cdot 6 = 3{,}14\cdot 12=$
  $= 37{,}68$ *cm*

  Área lateral $= 37{,}68\cdot 18 = 678{,}24$ *cm²*

  Área base $= \pi\cdot 6^2=3{,}14\cdot 36=113{,}04$ *cm²*

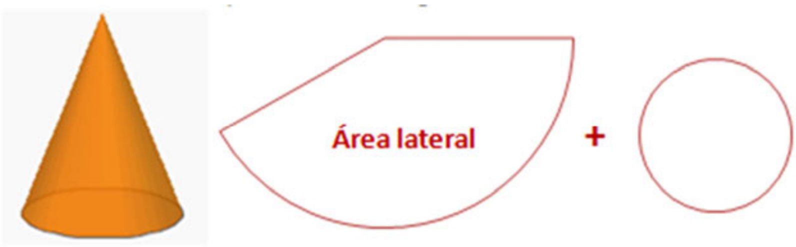
  Área total$=678{,}24+2\cdot 113{,}04=904{,}32$ *cm²*



Área del cono

El desarrollo del cono está formado por un sector circular de radio la generatriz del cono, que vamos a llamar *g*, y un círculo de radio *r* que es la base.

Para calcular el área del sector circular basta fijarnos en que la longitud del arco de circunferencia correspondiente es 2πr, longitud de la circunferencia de la base, y mediante proporcionalidad directa resulta que el área es πrg.



***Área lateral* = πrg**

***Área total* = *Área lateral* + *Área de la base* = $\pi rg + \pi r^2$**

Ejemplo

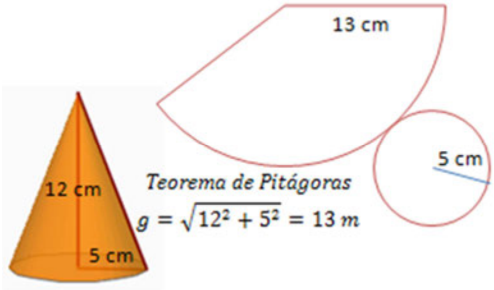
- *Área del cono de altura 12 cm y radio de la base 5 cm.*

  En este caso hay que calcular la generatriz, observa en la figura que, aplicando el Teorema de Pitágoras, mide 13 cm.

  Área lateral = $\pi\cdot 5\cdot 13 = 204{,}1\ cm^2$

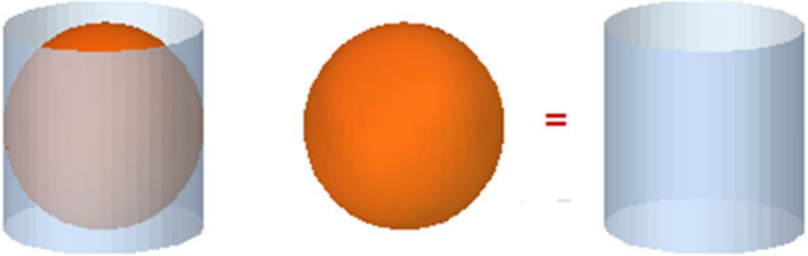
  Área base = $\pi\cdot 5^2 = 78{,}5\ cm^2$

  Área total = $204{,}1+78{,}5 = 282{,}6\ cm^2$



Área de la esfera

El área de una esfera es igual a la del cilindro que la circunscribe, esto es, un cilindro que tiene el mismo radio, R, y generatriz el diámetro 2R.

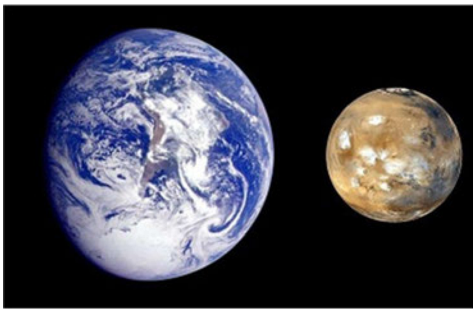


Área de la esfera = *Área lateral del cilindro circunscrito =* $2\pi R\cdot 2R$ = $\mathbf{4\pi R^2}$

Ejemplo

- *El radio de Marte es 3397 km, y el de la Tierra es 6378 km. ¿Cuál es la superficie de cada planeta?. ¿Cuántas veces es mayor la superficie de la Tierra que la de Marte?.*

  Superficie Marte = $4\cdot\pi\cdot 3397^2$ =
  = $144937489\ km^2$
  Superficie Tierra = $4\cdot\pi\cdot 6378^2$ =
  = $510926783\ km^2$
  510926783/144937489 = 3,5



Aproximadamente la superficie de la Tierra es 3,5 veces mayor que la de Marte.

Comprueba

5. $A_{lateral} = 1105, 84cm^2$
   $A_{total} = 1507{,}96cm^2$
6. $A_{lateral} = 1319, 17cm^2$
   $A_{total} = 1771{,}86cm^2$
7. $A_{lateral} = 911{,}94\ cm^2$
   $A_{total} = 1364{,}33\ cm^2$
8. $A = 1809{,}56\ cm^2$

Practica

5) *Calcula el área lateral y total de un cilindro de genratriz 22 cm y radio de la base 8 cm.*

6) *Calcula el área lateral y total de un cono de generatriz 35 cm y radio de la base 12 cm.*

7) *Calcula el área lateral y total de un cono de altura 21 cm y radio de la base 12 cm.*

8) *Calcula la superficie de una esfera de radio 12 cm.*

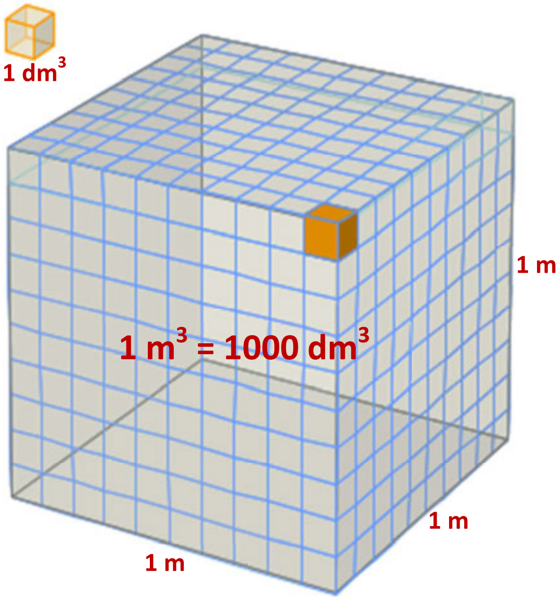
4. El volumen

Unidades de volumen

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. Medir el volumen de un cuerpo significa compararlo con una unidad de volumen conocida.

La unidad fundamental de volumen en el Sistema Internacional de medidas es el **metro cúbico**, se escribe **m^3**, y se define como el volumen de un cubo de 1 m de arista.

Para medir volúmenes muy grandes o muy pequeños utilizamos los *múltiplos* o *submúltiplos* del m^3.



Imagina un cubo de 1 dm de arista, su volumen es 1 dm^3.

¿Cuántos dm^3 caben en un m^3?.

Si te fijas en la imagen de la derecha comprobarás que caben 1000, 10 de ancho por 10 de largo, por 10 de alto.

1 m^3 = 1000 dm

De la misma forma en un cubo de 1 dam (10 m) de arista, esto es en 1 dam^3 caben 1000 m^3.

1 dam^3 = 1000 m^3

Así de 1000 en 1000 podemos construir los submúltiplos y múltiplos del m^3. Observa que se emplean los mismos nombres que ya conoces.

MÚLTIPLOS		SUBMÚLTIPLOS
km^3 *(kilómetro cúbico)* **hm^3** *(hectómetro cúbico)* **dam^3** *(decámetro cúbico)*	m^3	**dm^3** *(decímetro cubico)* **cm^3** *(centímetro cúbico)* **mm^3** *(milímetro cúbico)*

Relaciona

Indica la unidad que utilizarías para medir cada volumen

m^3

mm^3

hm^3

cm^3

dm^3

Una gota de agua

Un pantano

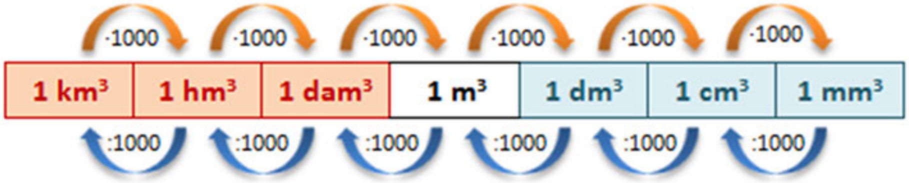
Una botella de refresco

Una cucharada de jarabe

Una piscina

Pasar de unas unidades a otras

Acabamos de ver que las unidades de volumen van de "mil en mil", esto es que 1000 unidades de un orden determinado hacen una unidad del orden inmediatamente superior como 1000 dm³ son 1 m³ y 1000 m³ son 1 dam³. Fíjate en el cuadro siguiente:



- Para expresar un volumen dado en una determinada unidad, en otra inferior a la que tenemos, multiplicamos por 1000 tantas veces como "saltos" haya de una unidad a la otra.
- Para expresar un volumen dado en una unidad, en otra superior a la que tenemos, dividimos por 1000 tantas veces como "saltos" haya entre una y otra.

más...

RECUERDA

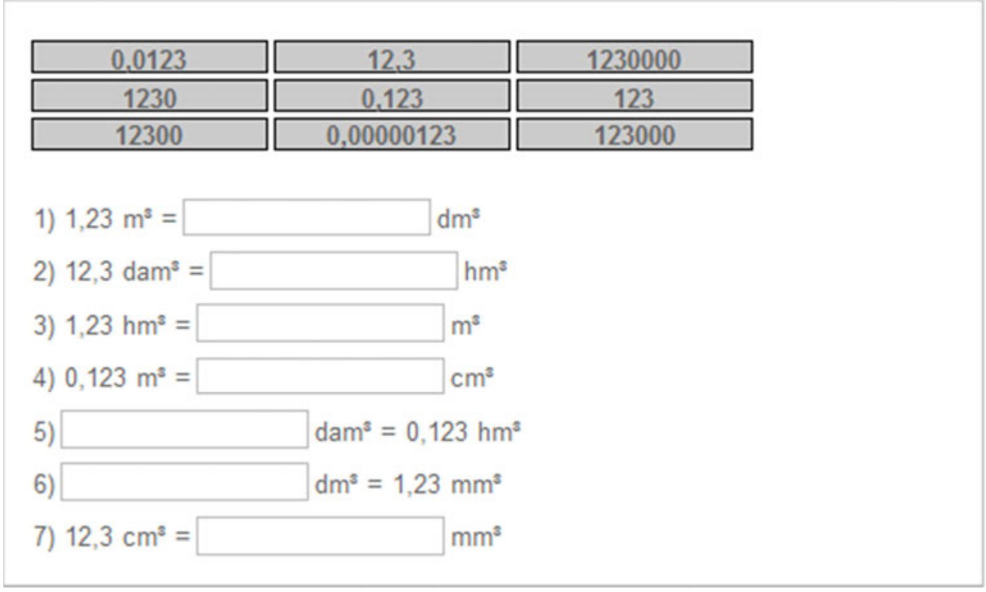
▶ Para *multiplicar* por la unidad seguida de ceros se añaden tantos ceros, o se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros haya, dependiendo de que el número sea entero o decimal.

▶ Para *dividir* entre la unidad seguida de ceros se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros haya.

Ejemplos

- 3,547 m^3 = 3547 dm^3 = 3 547 000 cm^3
- 354 m^3 = 0,354 dam^3 = 0,000 354 hm^3
- 83,26 hm^3 = 83 260 dam^3 = 83 260 000 m^3
- 43 567 cm^3 = 43,567 dm^3 = 0,043 567 m^3

Completa



0,0123	12,3	1230000
1230	0,123	123
12300	0,00000123	123000

1) 1,23 m^3 = ☐ dm^3

2) 12,3 dam^3 = ☐ hm^3

3) 1,23 hm^3 = ☐ m^3

4) 0,123 m^3 = ☐ cm^3

5) ☐ dam^3 = 0,123 hm^3

6) ☐ dm^3 = 1,23 mm^3

7) 12,3 cm^3 = ☐ mm^3

Capacidad y volumen

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y la capacidad lo que cabe en un recipiente. Capacidad y volumen son términos que se encuentran estrechamente relacionados, de manera que en el lenguaje habitual se usan indistintamente.

En general llamaremos capacidad de un recipiente a su volumen. Y en este caso es frecuente utilizar como unidad de medida el litro y sus múltiplos o submúltiplos.

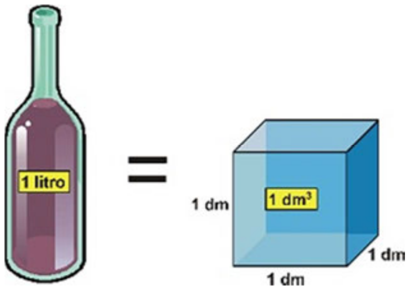
- 1 litro es la capacidad de un cubo de 1 dm de arista.

1 litro = 1 dm^3

Y a partir de aquí podemos establecer la equivalencia entre las demás unidades:

1 ml (milésima parte de un litro) = **1 cm^3**

1 kl (mil litros) = **1 m^3**



Ejemplos

- *¿Cuántos vasos de refresco de 250 cm^3 cada uno, se pueden llenar con una botella de 2 l?*

  2 *l* = 2 *dm*^{3} = 2000 *cm*^{3}

  2000 : 250 = 8 *vasos se podrán llenar*

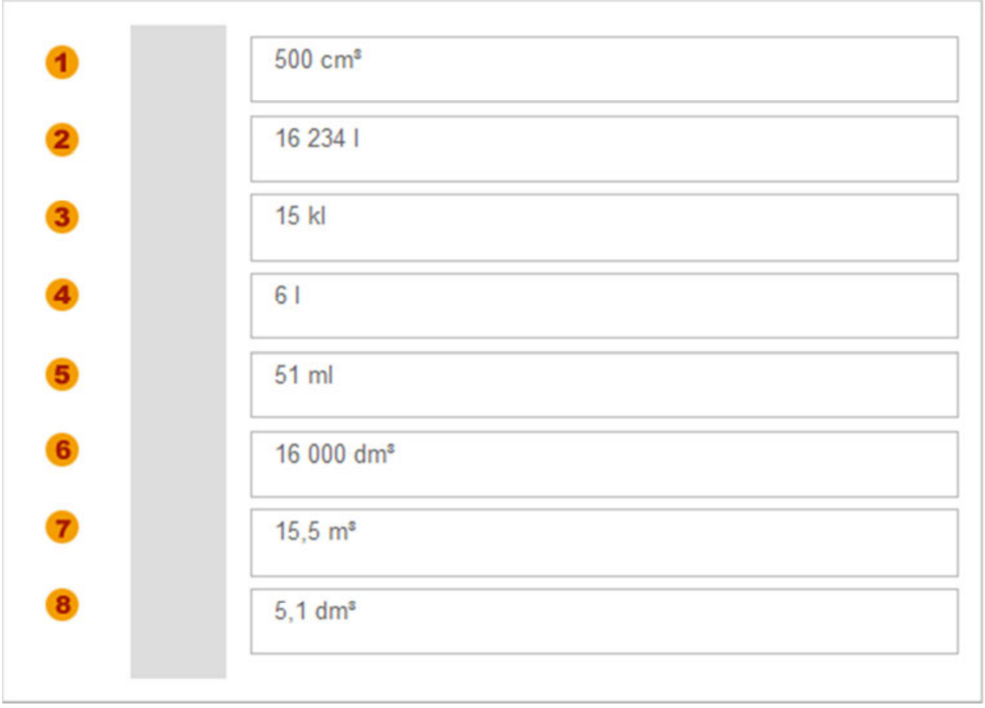
- *¿Cuántas cucharadas de aceite, de 5 cm^3 cada una, se necesitan para llenar una aceitera de un cuarto de litro?*

  0,25 *l* = 0,25 *dm*^{3} = 250 *cm*^{3}

  250 : 5 = 50 *cucharadas harán falta.*

Completa

Ordena de menor a mayor las siguientes cantidades.



① 500 cm^3
② 16 234 l
③ 15 kl
④ 6 l
⑤ 51 ml
⑥ 16 000 dm^3
⑦ 15,5 m^3
⑧ 5,1 dm^3

4.1. Volumen de cuerpos geométricos

Volumen del ortoedro

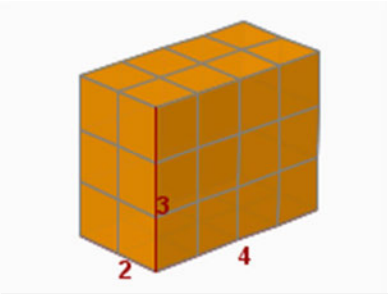
Medir el volumen de un cuerpo consiste en ver cuántas veces cabe en él una unidad de volumen.

Observa cuántos "cubitos" de 1 cm³ caben en el ortoedro de la figura. Puedes ver fácilmente que para calcular el volumen basta multiplicar las medidas de las aristas.

$$V_{ortoedro} = largo \cdot ancho \cdot alto$$

Si las tres aristas miden lo mismo, es decir si se trata de un *cubo* de arista *a*, la fórmula anterior se escribe:

$$V_{cubo} = a \cdot a \cdot a = a^3$$



Nº de cubitos = 2·4·3
Volumen del ortoedro = 48 cm^3

Ejemplo

- *¿Cuál es el volumen de un ortoedro de vasos de refresco de 250 cm^3 cada uno, se pueden llenar con una botella*

  2 *l* = 2 *dm*^{3} = 2000 *cm*^{3}

Volumen de prismas y cilindros

Los ortoedros son una clase de prismas, veamos como calcular el volumen de cualquier prisma.

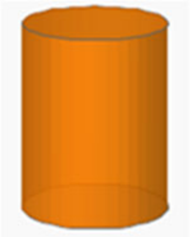
La base de este prisma es un pentágono regular de lado 4 cm y apotema 2,75 cm. El área de la base es: $A_{base} = 5 \cdot 4 \cdot 2,75/2 = 27,5$ cm²

Siguiendo un procedimiento similar al empleado en el caso del ortoedro, necesitaríamos 27,5 cubitos de 1 cm³ para cubrir la base. Y si la altura del prisma es de 9 cm, para llenarlo hasta arriba hemos de hacer 9 pisos como la base. Por tanto el volumen será:

$$V = 27,5 \cdot 9 = 247,5 \text{ cm}^3$$

- El volumen de un prisma es igual al área de la base por la altura.

$$V_{prisma} = Área_{base} \cdot altura$$



Si construimos un prisma con muchísimas caras laterales, cuantas más caras tiene más se parece a un cilindro. Un cilindro puede considerarse como un prisma en que el polígono de la base tiene infinitos lados, por eso para calcular su volumen podemos emplear el mismo procedimiento que con los prismas.

- El volumen de un cilindro es igual al área de la base por la altura.

$$V_{cilindro} = Área_{base} \cdot altura = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

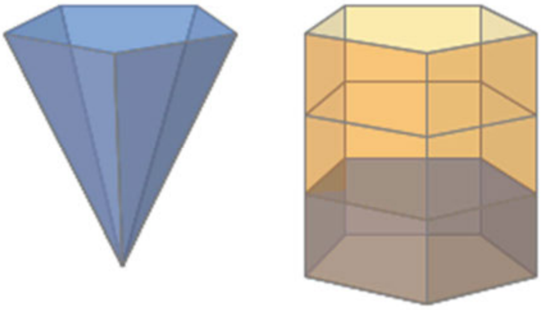
Ejemplo

- *Un depósito tiene forma cilíndrica de radio 80 cm y altura 1,50 m. Si está lleno de agua hasta la mitad, ¿cuántos litros contiene?.*

  Antes de calcular el volumen expresamos todas las medidas en las mismas unidades, por ejemplo en m^3:

  Volumen = $\pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 0,80^2 \cdot 1,50 = 3,0144$ m^3
  La mitad son 1,5072 m^3 = 1507,2 louyod

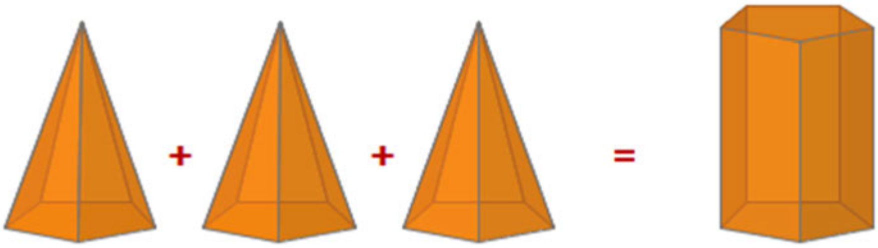
Volumen de pirámides y conos



Con una pirámide y un prisma con igual base y la misma altura podríamos realizar un sencillo experimento consistente en llenar de agua la pirámide, hasta arriba, y vaciarla en el prisma.

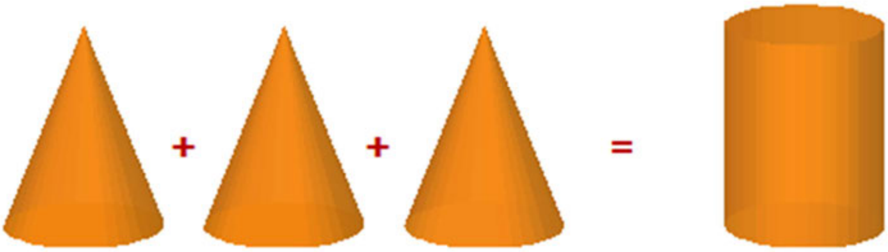
Se puede comprobar que el agua llena el prisma hasta la tercera parte de su altura. Para llenar el prisma necesitaríamos vaciar el contenido de la pirámide tres veces.

Por tanto el volumen de la pirámide es la *tercera parte* del volumen del prisma que ya sabes calcular.



$$\boldsymbol{Volumen_{pirámide} = \frac{1}{3} área_{base} \cdot altura}$$

Lo mismo ocurre con los conos y cilindros, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y altura.



$$\boldsymbol{Volumen_{cono} = \frac{1}{3} área_{base} \cdot altura = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}$$

Ejemplos

- *La pirámide de Giza es la mayor de las pirámides de Egipto que aún perdura, su base es un cuadrado de 230 m de lado y su altura mide 137 m. ¿Cuál es su volumen?*

  Área de la base = 230·230 = 52900 m^2

  Volumen = 52900·137/3 = 2415766,7 m^3

- *¿Cuántos cm^3 de helado caben en un cono de 2,5 cm de radio y 15 cm de altura?*

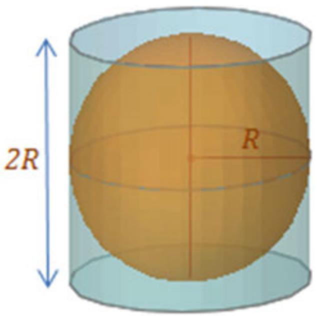
  Área de la base = π·2,5^2 = 19,625 cm^2

  Volumen = 19,625·15/3 = 98,125 cm^3

Volumen de la esfera

Como ocurría al calcular la superficie, también hay una relación entre el volumen de una esfera y el del cilindro circunscrito. El volumen de la esfera es igual a las *dos terceras partes* del volumen del cilindro en que está inscrita.

El radio del cilindro es el de la esfera, R. La altura del cilindro es el diámetro de la esfera, 2R.



$$Volumen\ del\ cilindro = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

$$Volumen\ de\ la\ esfera = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

más…

Arquímedes

Arquímedes de Siracusa está considerado como uno de los más grandes sabios de la antigüedad clásica. Nació en Siracusa hacia el año 287 a.C. y murió en el 212 a.C. durante el sitio romano a esta ciudad.

En su tumba, tal como la describe Cicerón, había una esfera inscrita en un cilindro según su deseo, pues el del volumen de la esfera relacionado con el del cilindro fue uno de sus descubrimientos preferidos.

Ejemplos

- *Calcula el volumen de una esfera de radio 20 cm, expresa el resultado en litros.*

  Volumen = $4\cdot\pi\cdot 20^3/3 = 4\cdot 3{,}14\cdot 8000/3 = 33493{,}33\ cm^3 = 33{,}49333\ dm^3$
  aproximadamente 33,5 litros

- *En un vaso cilíndrico de 15 cm de altura y 4 cm de radio, lleno de agua hasta el borde, introducimos una bola esférica de 3 cm de radio, parte del agua se derrama; ¿cuántos* cm^3 *de agua quedan en el vaso?.*

  Volumen del cilindro = $\pi\cdot 42\cdot 15 = 756{,}3\ cm^3$

  Volumen de la esfera = $4\cdot\pi\cdot 33/3 = 113{,}04\ cm^3$

  La cantidad de agua derramada es igual al volumen de la esfera, por tanto el agua restante es la diferencia $756{,}3 - 113{,}04 = 643{,}26\ cm^3$

Practica

9) *Calcula el volumen de un prisma cuadrangular regular de altura 27 cm y arista de la base 14 cm.*

10) *Calcula el volumen de un prisma pentagonal regular de medidas: altura 21 cm, arista de la base 17 cm y apotema de la base 11,7 cm.*

11) *Calcula el volumen de una pirámide exagonal regular de altura 29 cm y arista de la base 18 cm.*

12) *Calcula el volumen de un cilindro de generatriz 36 cm y radio de la base 10 cm.*

13) *Calcula el volumen de un cono de altura 24 cm y radio de la base 8 cm.*

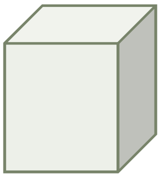
14) *Calcula el volumen de un cono de generatriz 24 cm y radio de la base 8 cm.*

15) *Calcula el volumen de una esfera de radio 12 cm.*

Comprueba

9. $V = 5292\ cm^3$
10. $V = 10442{,}25\ cm^3$
11. $V = 8137{,}98\ cm^3$
12. $V = 11309{,}76\ cm^3$
13. $V = 1608{,}48\ cm^3$
14. $V = 1213{,}32\ cm^3$
15. $V = 7238,\ 23\ cm^3$

Ejercicios



1. *¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de medidas 0,6 m × 0,4 m × 0,7 m si la madera con que está construido cuesta a 16 € el m^2.*

2. *Halla el área de un tetraedro regular de 10 cm de arista.*

3. *Las paredes de un pozo de 6 m de profundidad y 1,8 m de diámetro han sido cementadas. El precio es de 30 € el m^2, ¿cuánto ha costado?.*

4. *Una sombrilla tiene forma de pirámide octogonal de 40 cm de arista de la base y 110 cm de arista lateral, ¿cuánta tela hace falta para fabricarla?.*

5. *Se dice que en la antigüedad la pirámide de Keops estaba cubierta con láminas de oro. Imagina que estas láminas midieran 1 m^2 cada una. Si las dimensiones de esta pirámide son: lado de la base = 234 m y altura = 148 m, calcula el número de placas de oro necesarias para cubrirla.*

6. *Una piscina de 12 m de largo, 4,5 m de ancho y 1,50 m de profundidad se quiere recubrir de azulejos cuadrados de 20 cm de lado. ¿Cuántos azulejos se necesitan si se desperdicia un 10%?.*

7. *Una caja de bombones tiene forma de prisma triangular de 28 cm de alto y 3 cm de arista de la base, ¿cuánto papel se necesita como mínimo para envolverla?.*

8. *Una lata de conservas cilíndrica tiene 18 cm de alta y 8,6 cm de diámetro de la base, ¿qué cantidad de hojalata hace falta para construirla?, ¿qué cantidad de papel se necesita como mínimo para la etiqueta?.*

9. *Se quieren tratar las paredes de un depósito cilíndrico de 3 m de altura y 3 m de diámetro con pintura antioxidante. Si el trabajo cuesta 35 €/m^2, ¿cuánto se pagará?. ¿Cuánto costará pintar con la misma pintura otro depósito esférico de 1,5 m de radio?.*

10. *Para una fiesta de disfraces quiero construir un sombrero de mago de 40 cm de altura, mido el contorno de mi cabeza y tiene 56,52 cm. ¿Cuánto medirá la generatriz de este cono?, ¿cuánta cartulina necesito para hacerlo?.*

11. *Sabiendo que el radio de la Tierra es 6370 km calcula la superficie usando como aproximación del valor de π: a) 3; b) 3,14 y c) 3,1416.*

12. *Transforma en m^3 las siguientes unidades de volumen:*

    a) 0,025 hm^3 *b) 43212 dm^3*

    c) 324 hm^3 *d) 26 dam^3*

    e) 0,012 km^3 *f) 45,23 dam^3*

13. *Transforma en litros:*

    a) 0,25 hm^3 *b) 3517 cm^3*

    c) 32 m^3 *d) 2,6 dam^3*

    e) 0,012 m^3 *f) 45,23 m^3*

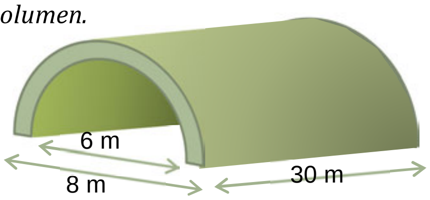
14. *¿A cuánto ascenderá la factura del gas de este mes si hemos gastado 0,022 dam^3 y el m^3 cuesta 0,42 €?*

15. *La cantidad de lluvia que cae suele expresarse en litros por m^2, si en una tormenta han caído 35 l/m^2 y se recogiese todo el agua, ¿qué altura alcanzaría sobre un metro cuadrado?.*

16. *Una caja en forma de ortoedro tiene 9 dm de larga y 6 dm de ancha. Su volumen es 378 dm^3. Halla su altura y su superficie total.*

17. *La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 dm y 6 dm, la altura del prisma es 0,9 m. Calcula su volumen.*

18. *Calcula el volumen de hormigón que se ha empleado para hacer el túnel de la figura.*



19. *Un sótano rectangular cuya superficie es de 160 m^2 se ha inundado. El agua llega a 1,20 m de altura. Se extrae el agua con una bomba que saca 6 hl por minuto, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarlo?.*

20. *Una columna de basalto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 20 cm y la altura de la columna es de 2,5 m. Halla su peso sabiendo que 1 m^3 de basalto pesa 2845 kg.*

21. *La densidad del acero es 7850 kg/m^3, ¿cuánto pesará una bola maciza de acero de 3 cm de radio?.*

22. *Quiero poner aire acondicionado en el salón de mi casa que tiene planta rectangular de 8,2 m de largo por 3,6 m de ancho y 2,5 m de altura. Me han dicho que se necesitan 50 frigorías por m^3, ¿cuántas frigorías deberá producir el aparato que he de instalar?.*

23. *¿Qué forma tiene un octaedro?. Calcula el volumen de un octaedro de 8 cm de arista.*

24. *Se ha construido un depósito de gas de forma esférica con una superficie de 355,3 m^2. ¿Cuántos m^3 de gas puede contener?.*

25. *Un silo tiene forma cónica de 4 m de altura y 1,5 m de radio de la base, ¿qué capacidad tiene?.*

26. *Un cubo de 16 cm de arista está completamente lleno de agua, ¿cuánta contiene?. Introducimos una esfera de 8 cm de radio, ¿qué cantidad de agua se derrama?.*

Matemáticas y Tecnología 2º

Tablas y gráficas

6

Los medios de comunicación: prensa, televisión, revistas, propaganda,… utilizan el lenguaje gráfico para transmitir la información de un modo más comprensible y agradable. Mediante los gráficos nos hacemos una idea general y a primera vista de los hechos y fenómenos de nuestro entorno. Nos permiten acceder de una forma rápida a la información que en ellos se almacena y nos da la posibilidad de hacer predicciones sobre los mismos.

Los gráficos nos dan información sobre relaciones entre magnitudes, fenómenos medibles, como por ejemplo el tiempo y el número de parados, el tiempo y la temperatura de un enfermo, el peso de un artículo y su precio; incluso una relación matemática como un número y su doble; un número y su inverso, etc.

Este tipo de relaciones no sólo son utilizadas en las Matemáticas, sino también en otras disciplinas como la Física, Química, Biología, la Medicina, la Economía, La Historia, la Geografía, etc. Haciendo que sus informaciones sean más comprensibles y no queden enmascaradas por los datos numéricos

En esta unidad vas a manejar tablas y gráficas para comprender mejor las informaciones que se presenten, al finalizarla deberás ser capaz de:

- *Situar puntos del plano en un sistema de ejes coordenados.*
- *Determinar las coordenadas cartesianas de puntos del plano.*
- *Representar gráficas a partir de tablas de datos o de textos sobre la evolución de una situación. Construir tablas de valores.*
- *Reconocer y distinguir algunas propiedades que cumplen las relaciones entre magnitudes.*
- *Construir gráficas de relaciones de proporcionalidad sencillas.*
- *Ordenar y clasificar datos en tablas de frecuencias.*
- *Representar datos estadísticos en forma gráfica.*

1. Introducción

más...

Gráficas en la vida cotidiana

Son diversos los campos en los que se usan los gráficos para estudiar fenómenos.

En Medicina por ejemplo, seguro que has oido hablas de las espirometrías, los electrocardiogramas y lo electroencefalogramas.

El estudio de dichos gráficos permite averiguar si las funciones de dichos órganos son las normales o hay alguna dificultad.

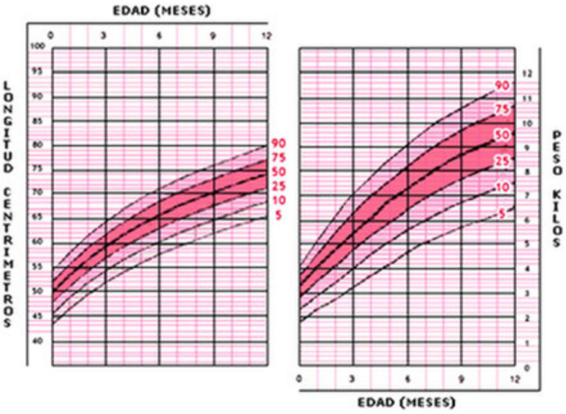
Para que encuentres más campos en los que el lenguaje gráfico es necesario puedes ver el siguiente video

Vivimos en un mundo lleno de datos, tablas y gráficos que aparecen en los periódicos, en revistas, facturas, informes médicos, etc. Este sería un motivo para dedicarles atención.

La aparición de tal cantidad de gráficas en los medios de comunicación es consecuencia de la capacidad que tienen las gráficas para resumir una gran cantidad de datos.

No olvidemos que en Medicina, Economía, Ciencias de la Naturaleza, Estadística, Ciencias Sociales ..., son un método eficaz para resumir y presentar sus estudios.

Nos proporcionan una **visión de conjunto** que sirve para aclarar el tema que se trate. También nos permiten **establecer comparaciones** e incluso hacer **predicciones**.



Por ejemplo: En el primer año de vida los pediatras y los padres controlan el crecimiento de los bebés utilizando unas tablas como las de la figura adjunta.

Tendremos que analizarlas con cuidado y no dejarnos llevar por una primera impresión. Los aspectos que no deberemos olvidar son.

- Las gráficas nos permiten intercambiar información de forma eficaz y rápida.
- Las gráficas nos relacionan dos magnitudes o nos indican la variación de una magnitud en el tiempo.

Número de cines	**868**
Número de pantallas	**4140**
Películas exhibidas	**1652**
Recaudación (millones de euros)	**619,3**
Películas españolas	**81,6**
Películas extranjeras	**537,7**
Espectadores (millones)	**107,8**
Películas españolas	**14,4**
Películas extranjeras	**93,5**

Las **tablas de datos** son otra forma útil y eficaz de resumir información.

Las tablas y las gráficas están íntimamente relacionadas.

La persona que pretende comunicar alguna información elige cuál es el método más adecuado

En el ejemplo aparece información de la actividad de las salas de cine durante el año 2008. La información se ha obtenido en el INE.

Tablas

Es muy corriente encontrar información en forma de tablas y se utilizan frecuentemente para organizar la información

Al leer el periódico cualquier mañana se puede observar la audiencia de Tv en cualquier día. Por ejemplo un día de septiembre cinco de las cadenas tuvieron los resultados:

Cadena	La 1	Telecinco	Antena 3	Cuatro	La sexta
Audiencia en %	16,1	14,4	11,1	7	5,8

En la primera fila aparecen los nombres de las cadenas y, en la segunda, qué porcentaje de audiencia tuvo cada una de ellas.

- Si consultas un libro de Geografía o Historia encontrarás numerosos temas resumidos en forma de tabla.
- En los planos de carreteras aparecen tablas que nos dan las distancias entre las diferentes ciudades.

- También en algunas tiendas podemos encontrar los precios escritos en tablas. Por ejemplo, en una Copistería encontramos los precios de las fotocopias:

Nº fotocopias	hasta 10 copias	entre 11 y 50	entre 51 y 100	entre 101 y 500	más de 500
Precio por unidad	5 céntimos	3 céntimos	2,4 céntimos	2 céntimos	1,5 céntimos

- **Una tabla es una lista de datos clasificados, ordenados y relacionados entre sí**.

  Aparecen distintos elementos, numéricos o no, distribuidos en filas y columnas. Son útiles porque:

  - Se puede presentar mucha información en poco espacio.
  - Es posible expresar los datos de forma ordenada
  - Permite relacionar unos elementos con otros.
  - La disposición en filas y columnas facilita la lectura, la comprensión y permite localizar rápidamente la información.

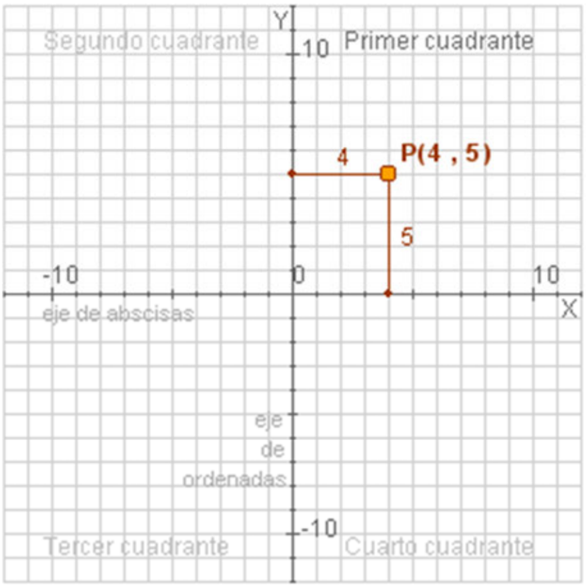
Para construir una tabla, necesitamos saber qué elementos queremos presentar en ella y cómo conseguir la información.

2. Sistema de coordenadas

Un **sistema de ejes** o de **coordenadas cartesianas** está formado por dos ejes numéricos perpendiculares, uno *horizontal*, llamado de **abscisas** y otro *vertical*, llamado de **ordenadas**.

- Los dos ejes se cortan en un punto llamado **origen de coordenadas**.
- Ambos ejes llevan una *escala*.

Observa en la imagen de debajo los elementos de un sistema de ejes coordenados



Cada punto aparece designado por dos valores numéricos ordenados, de la forma

(a, b)

son las **coordenadas cartesianas** del punto.

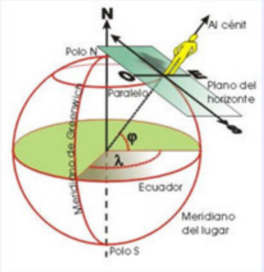
- La *primera coordenada* de llama **abscisa** y nos indica la distancia que hay entre el punto y el eje vertical.
- La *segunda coordenada* se llama **ordenada** y nos indica la distancia entre el punto y el eje horizontal

más…

Otros usos

Podemos encontrar coordenadas en diversas ramas como la geografía, la criptografía, la física,..

En **geografía**:



Longitud y latitud son las coordenadas geográficas. Se miden en **grados** y tienen como **origen** el **meridiano de Greenwich** y el **ecuador** respectivamente.

Planos y mapas de las ciudades

¿Qué mejor podemos encontrar para visitar una nueva ciudad y encontrar los lugares más interesantes?

Relaciona

¿Qué signo tienen la abscisa y la ordenada de un punto según el cuadrante en el que esté?

Las dos positivas

Las dos negativas

Abscisa positiva y ordenada positiva

Abscisa positiva y ordenada negativa.

Primer cuadrante

Segundo cuadrante

Tercer cuadrante

Cuarto cuadrante

Elige la correcta

¿Cuál es la ordenada de los puntos situados en el eje de abscisas?

Positiva ○

Cero ○

Negativa ○

¿Cuál es la ordenada de los puntos situados en el eje de ordenadas?

Positiva ○

Cero ○

Negativa ○

¿Cuáles son las coordenadas del origen?

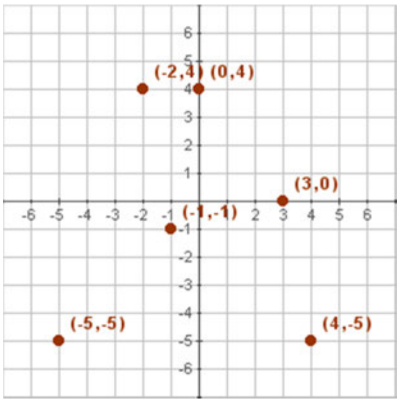
(0, 0) ○

(1,1) ○

Ninguna de ellas ○

Para colocar los puntos en un sistema de coordenadas seguimos el siguiente procedimiento:

- Nos colocamos en el origen de coordenadas.
- Leemos la primera coordenada o abscisa que nos indica el desplazamiento en el eje horizontal que debemos hacer. Si es positivo nos desplazaremos hacia la derecha y si es negativo hacia la izquierda.
- Después leeremos la segunda coordenada que nos indicará si debemos desplazarnos hacia arriba, si es positiva o hacia abajo si es negativa.



más...

Los juegos

Hay dos juegos muy conocidos que utilizan las coordenadas bien para jugar, bien para describir los movimientos.

Ajedrez

Cada casilla va indicada por una letra y un número. La reina blanca se encuentra en la casilla (A, 5) y la reina negra en (H, 5).

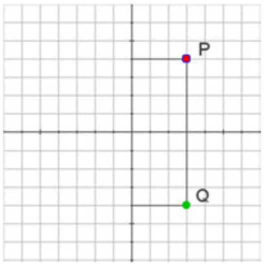
Utilizando las coordenadas se puede describir el desarrollo del juego.

"Los barquitos"

Juegan dos jugadores. Cada jugador coloca sus barcos y luego lanzan disparan, mediante las coordenadas, para localizar todos los barcos del otro jugador.

Puntos simétricos

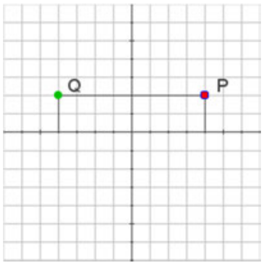
Puntos simétricos respecto del eje X



Los puntos **P(3,4)** y **Q(3,-4)** son simétricos respecto del eje de abscisas

- *¿Qué relación hay entre las coordenadas de P y su simétrico Q?.*

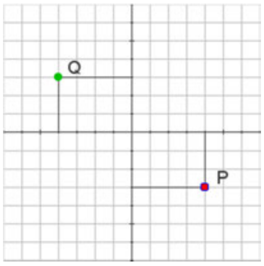
Puntos simétricos respecto del eje Y



Ahora **P(4, 2)** y **Q(-4, 2)** son simétricos respecto del eje de ordenadas.

- *¿Qué relación hay entre las coordenadas de P y su simétrico Q?*

Puntos simétricos respecto del origen

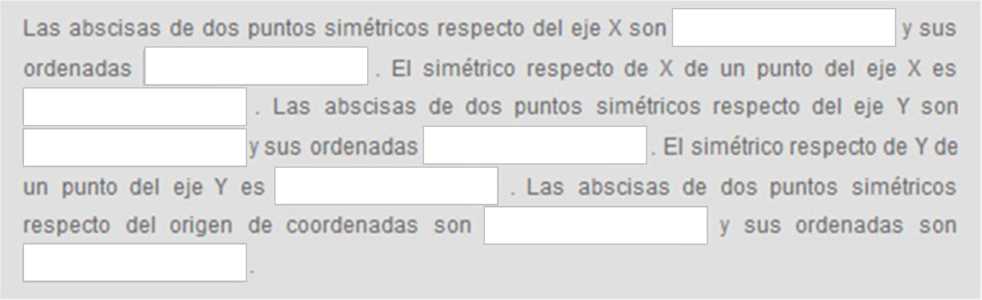


P(4, -3) y **Q(-4, 3)** son simétricos respecto del origen de coordenadas.

- *¿Cuál es ahora la relación?.*

Anota tus conclusiones en tu cuaderno y luego realiza la actividad siguiente:

Completa el texto



Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje X son ____ y sus ordenadas ____ . El simétrico respecto de X de un punto del eje X es ____ . Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje Y son ____ y sus ordenadas ____ . El simétrico respecto de Y de un punto del eje Y es ____ . Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del origen de coordenadas son ____ y sus ordenadas son ____ .

Practica

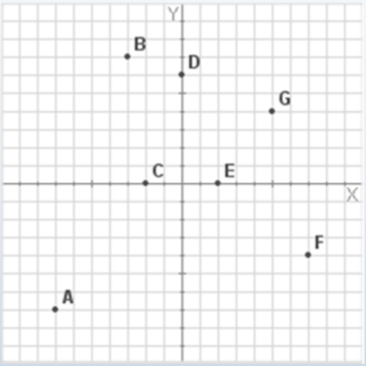
1) *Representa gráficamente los puntos: A(-7,-7), B(-5,4), C(-4,-4), D(0,-3) y E(4,0).*

2) *Dados los puntos A(-4,-4), B(6,0), C(0,6) y D(-4, 2). Determina las coordenadas de los simétricos respecto del origen.*

3) *Determina el vértice que falta en el rombo sabiendo que tres de sus vértices son A(-4,-4), B(0,-4) y C(-2,-8).*

4) *Dados los puntos A(-7,-7), B(-5, 0), C(0, 4), D(8,8). Determina: a) las coordenadas de los simétricos respecto del eje X; b) de los simétricos respecto del eje Y.*

5) *Determina las coordenadas de los puntos que aparecen en la figura:*



Comprueba

2. A'(4,4), B'(-6,0), C'(0,-6) y D'(4,-2)

3. D(-2, 0)

4. a) A'(-7,7), B'(-5,0), C'(0,-4), D'(8,-8)
b) A''(7,-7), B´´(5,0) C''(0,-4), D''(-8,8)

5. A(-7,-7), B(-3,7) C(-2,0), D(0,6) E(2,0), F(7,-4), G(5,4)

3. Gráficas cartesianas

Interpretación de puntos

Con las gráficas podemos intercambiar información sobre cualquier fenómeno o situación. Nos permiten encontrar las relaciones entre los valores de dos magnitudes.

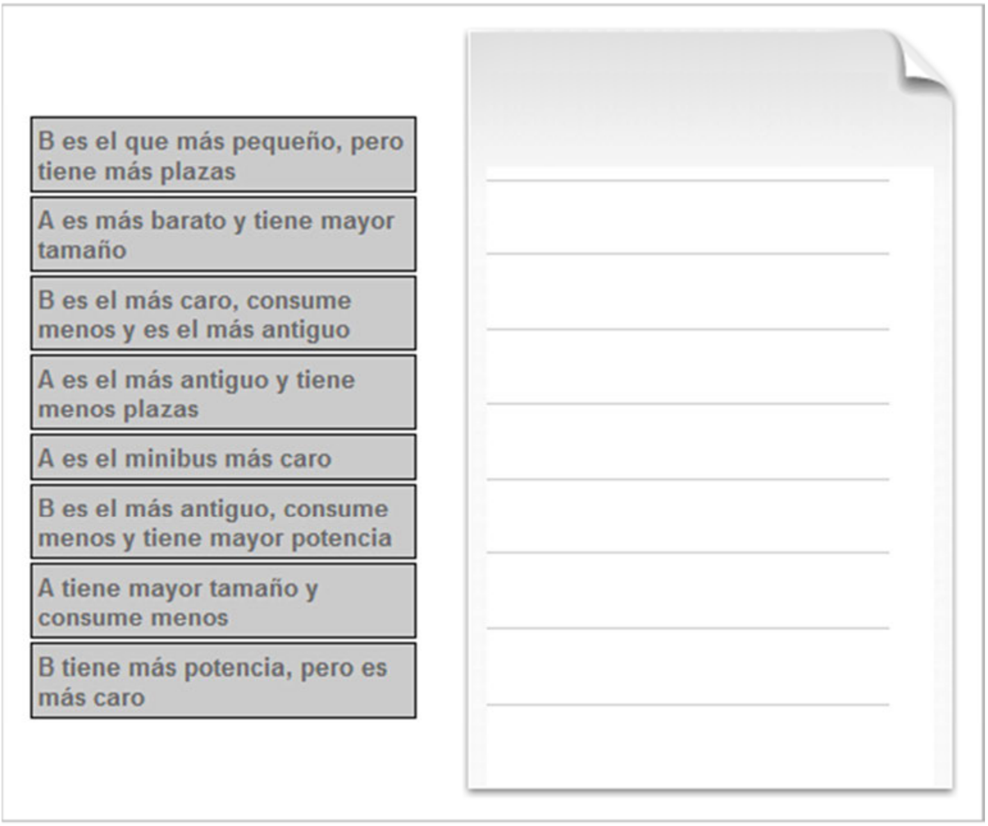
En la gráfica adjunta puedes ver unos puntos que representan a los amigos de Juan el pasado fin de semana. Aparece el tiempo que estuvieron hablando por teléfono y el coste de las llamadas.

Observa e interpreta:

El punto más alto y el más bajo, el punto que está más a la izquierda y el que está más a la derecha. Después interpreta la situación en la que están los puntos para comparar los valores.

Elige las correctas

Observa la imagen que representa las características de los dos minibuses. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?.



B es el que más pequeño, pero tiene más plazas

A es más barato y tiene mayor tamaño

B es el más caro, consume menos y es el más antiguo

A es el más antiguo y tiene menos plazas

A es el minibus más caro

B es el más antiguo, consume menos y tiene mayor potencia

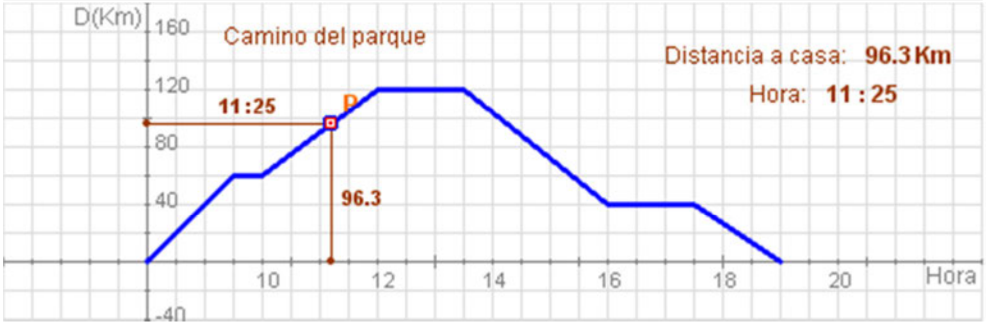
A tiene mayor tamaño y consume menos

B tiene más potencia, pero es más caro

Interpretación de gráficas

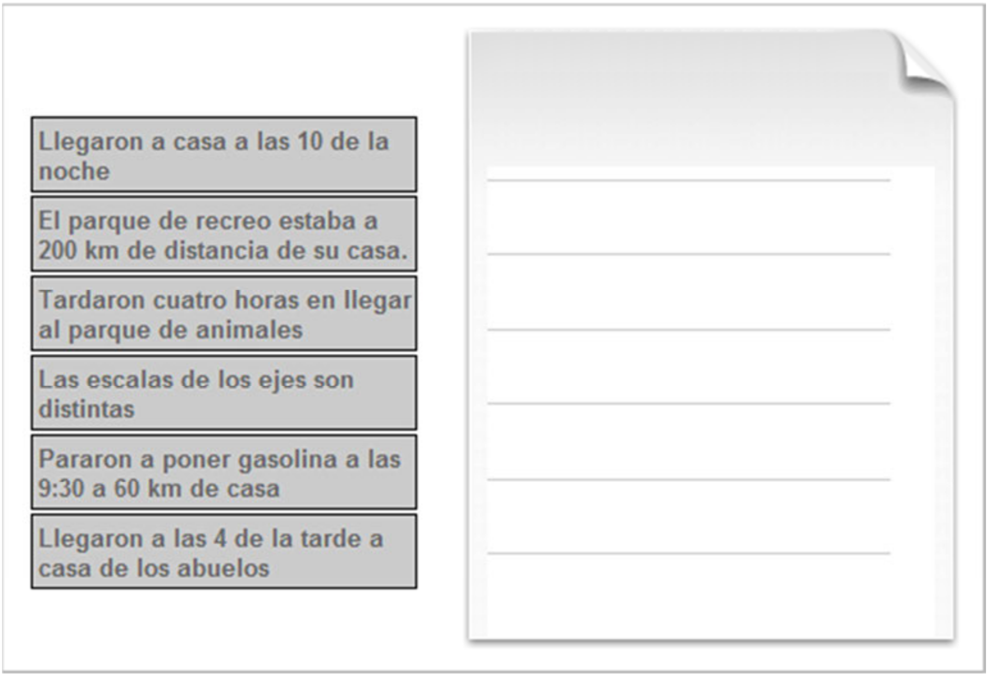
A veces los puntos que se representan en una **gráfica** están relacionados y describen una situación o resuelven un problema. La relación se expresa entre dos cantidades que varían. Por esta razón se les llama **variables**. Observa la siguiente situación y cómo se explica a partir de su gráfica

Marta y su familia salieron de excursión un día de fiesta. Su plan de viaje fue el siguiente: Salir pronto, hacia las 8. Viajar hasta un parque de animales. Regresar visitando las zonas de animales en libertad. Camino de casa visitar a los abuelos.



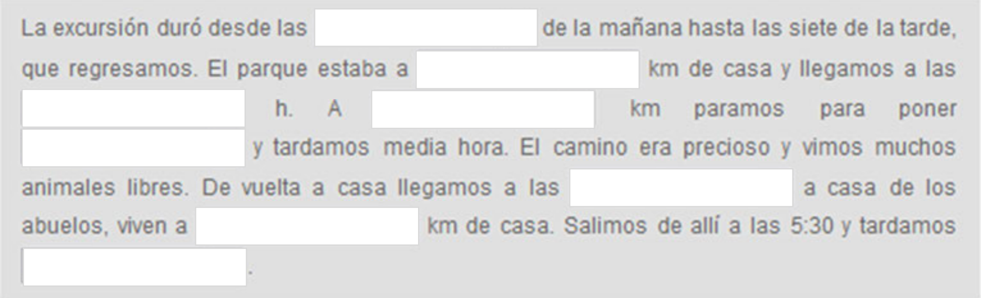
Elige las correctas

Entre las siguientes frases elige las que corresponden al viaje de Marta y su familia.



- Llegaron a casa a las 10 de la noche
- El parque de recreo estaba a 200 km de distancia de su casa.
- Tardaron cuatro horas en llegar al parque de animales
- Las escalas de los ejes son distintas
- Pararon a poner gasolina a las 9:30 a 60 km de casa
- Llegaron a las 4 de la tarde a casa de los abuelos

Completa el texto



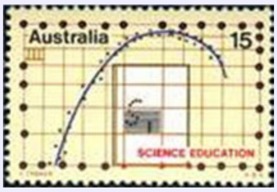
La excursión duró desde las ____ de la mañana hasta las siete de la tarde, que regresamos. El parque estaba a ____ km de casa y llegamos a las ____ h. A ____ km paramos para poner ____ y tardamos media hora. El camino era precioso y vimos muchos animales libres. De vuelta a casa llegamos a las ____ a casa de los abuelos, viven a ____ km de casa. Salimos de allí a las 5:30 y tardamos ____.

más…

Punto de partida

El punto de partida para construir una gráfica puede ser:

- Una **descripción verbal** de un fenómeno
- Una **tabla de valores** obtenida de un experimento, o un texto,.
- Una **expresión** o **fórmula**



Tablas y gráficas

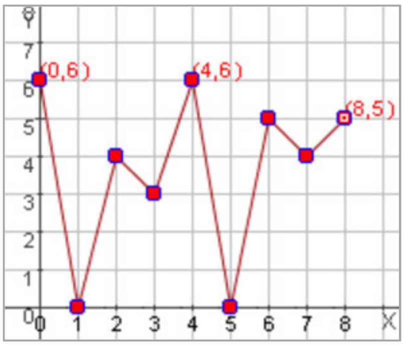
Como decíamos al principio las gráficas y las tablas están íntimamente relacionadas. Veremos a continuación varias actividades de paso de gráfica a tabla y al contrario

Paso de la tabla a la gráfica.

En la tabla aparecen las coordenadas de cada uno de los puntos que formarán la gráfica. Los representamos en los ejes coordenados. Por último, se pueden unir los puntos.

x	*y*
0	6
1	0
2	4
3	3
4	6
5	0
6	5
7	4
8	5

(5,8)
(3,4)
(1,0)
(0,-2)
(-1,-4)
(-3,-8)



Paso de la gráfica a la tabla

En la gráfica aparece el paseo que Antonio da todos los días. Observando la gráfica podemos contestar distintas preguntas:

- ¿Cuánto dura el paseo?, 50 minutos
- ¿A qué distancia se encuentra a los 20 minutos?, a 300 m
- ¿A qué distancia de su casa da la vuelta?, a 800 m.

más...

¿Se pueden unir los puntos?

Cuando se representan gráficamente unos datos obtenidos de una tabla, aparece la pregunta: ¿Se unen siempre los puntos?

***No**, sólo se pueden unir cuando la magnitud que representamos en el eje de abscisas puede tomar cualquier valor , no sólo los números enteros.*

***Se pueden unir** cuando en el eje x representamos el tiempo, la longitud, el peso, el área, la capacidad,...*

***No se pueden unir** cuando representamos magnitudes enteras como el número de panes que compramos, número de sillas que fabrica un carpintero, el número de fotocopias,...*

¿Por qué se unen a pesar de todo? *Porque es más fácil estudiar cómo varían los valores de las magnitudes que se representan*, pero no olvidamos que son gráficas de puntos aislados

Practica

6) *Trabajando con **la gráfica, la tabla y una situación***

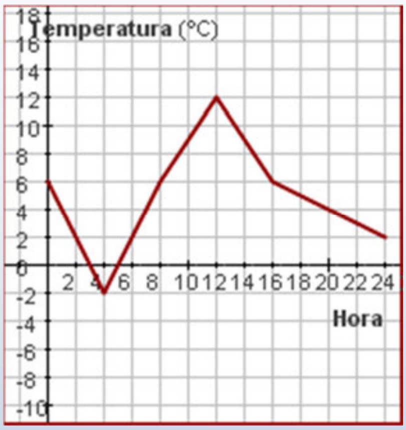
En la gráfica adjunta puedes estudiar las temperaturas que hubo en una ciudad el pasado invierno.

***a)** ¿Qué temperatura hubo a las 4 de la mañana?.*

***b)** ¿Y a las 8 de la mañana?*

***c)** ¿Cuál fue la temperatura máxima?.*

***d)** ¿Cuál fue la temperatura mínima?*



Comprueba

6. *a) -2 ºC*
b) 6 ºC
c) 12 ºC
d) -2 ºC

Gráficas, tablas y fórmulas

Hemos visto que las gráficas están relacionadas con las tablas. Si tenemos una tabla de datos podemos conseguir una imagen gráfica del conjunto de datos y así será más fácil sacar conclusiones.

Y recíprocamente, a partir de una gráfica podemos conseguir una tabla de datos para resumir la información o para estudiar situaciones concretas.

Hay una tercera situación que se puede producir, conocemos la fórmula que nos permitirá obtener los datos. Por ejemplo:

En una tienda de alquiler de bicicletas nos ofrecen pagar siguiendo la fórmula:

y = 3 + 0,20·x	**y** es el **precio** que debemos pagar **x** es el tiempo en horas que vamos a tener la bicicleta

Si estamos media hora montando en bicicleta pagaremos: *y = 3 + 0,20·0,5 = 3+0,1 = 3,1*

Tiempo (horas)	Precio (euros)
0,5	*3 + 0,2 · 0,5 = 3,1*
1	*3+ 0,2 · 1 = 3,2*
3	*3 + 0,2 · 2 = 3,4*
5	*3 + 0,2 · 5 = 4*
8	*3 + 0,2 · 8 = 4,6*

Podemos construir una tabla en el que se refleje el coste del alquiler.

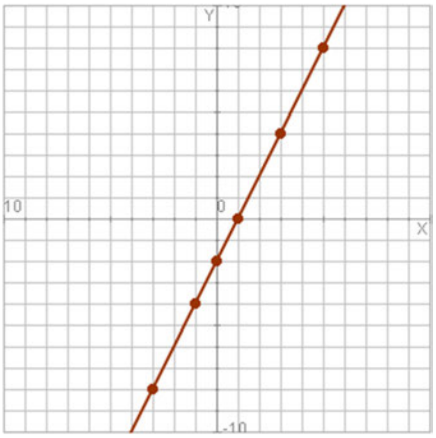
Observación: hemos averiguado el coste cuando el tiempo es 0,5; 1; 3, 5 y 8. No son los únicos valores, podríamos tener interés por averiguar el precio de otros. Tú puedes decidir qué valores elegir cuándo construyes una tabla a partir de una fórmula.

En el siguiente ejemplo puedes ver la relación entre fórmula, gráfica y tabla. Con la fórmula obtenemos los valores de la tabla. A continuación esos valores son las coordenadas de los puntos que representamos.

Ejemplo

- $y = 2x - 2$

x	y		
5	8	$2 \cdot 5 - 2 = 8$	(5,8)
3	4	$2 \cdot 3 - 2 = 4$	(3,4)
1	0	$2 \cdot 1 - 2 = 0$	(1,0)
0	-2	$2 \cdot 0 - 2 = -2$	(0,-2)
-1	-4	$2 \cdot (-1) - 2 = -4$	(-1,-4)
-3	-8	$2 \cdot (-3) - 2 = -8$	(-3,-8)



Practica

7) *Completa la tabla de valores y representa en los ejes cartesianos:*

a) $y = 2x - 1$

x	5	3	1	0	-1	-3
y						

b) $y = 2 - \frac{x}{2}$

x	-6	-2	0	2	4	8
y						

más…

Interpretar gráficas

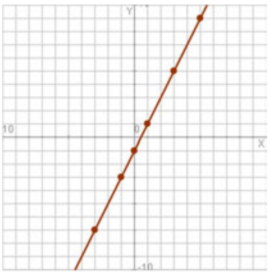
Para interpretar una gráfica:

1. Busca el **tema** que representa.
2. ¿De dónde procede? ¿Qué fecha?.
3. ¿Qué **magnitud** hay en el **eje X**? ¿Y en el **eje Y**?.
4. ¿Qué **unidades** se usan en cada eje?.
5. Busca la **escala**.
6. Observa los *puntos representados* y la **relación** entre las *variables*.
7. ¿Qué *símbolos, colores, leyenda* usan?.
8. Busca elementos en las gráficas: los puntos con valor *máximo,* los de valor *mínimo*, dónde valen *cero*, donde se observa *un aumento o una disminución*, *qué podrías deducir* a partir de lo que está dibujado.

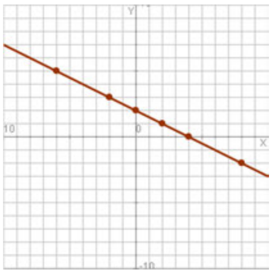
Cuando te pidan describir o interpretar una gráfica estos son los puntos que conviene señalar.

Comprueba

7. a)



b)



3.1. Funciones de proporcionalidad

Proporcionalidad directa

Empezamos por recordar alguna situación de proporcionalidad, como la que relaciona el consumo de gasolina de un coche con el precio.

Fíjate *"si duplicamos el número de litros , el precio se duplica. Si se triplica el consumo, se triplica el precio,... "* tenemos por tanto una situación de proporcionalidad directa.

El precio de un litro de gasolina es de 1,08 euros. Podemos construir una tabla que nos indique lo que debemos pagar según el número de litros.

Litros	Precio (euros)
1	*1,08*
5	*1,08 · 5 = 5,40*
10	*1,08 · 10 = 10,80*
20	*1,08 · 20 = 21,60*
40	*1,08 · 40 = 43,20*

Te habrás fijado que en muchos establecimientos que venden mercancías por unidades tienen tablas. Todas estas situaciones son de PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

- El *cociente entre el precio y el número de litros* es la **constante de proporcionalidad**.

Fíjate en los *siguientes ejemplos* cómo varían las gráficas según el *precio de la unidad* (la constante de proporcionalidad).

Ejemplos

x	*y*
0	0
1	**0,7**
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6

Los puntos están situados sobre una recta que pasa por el origen.

Son magnitudes directamente proporcionales

Constante de proporcionalidad = ***0,7***

Precio total =nº de unidades · precio unidad

x	*y*
0	0
1	**1,2**
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6
6	7,2
7	8,4
8	9,6

Los puntos están situados sobre una recta que pasa por el origen.

Son magnitudes directamente proporcionales

Constante de proporcionalidad = ***1,2***

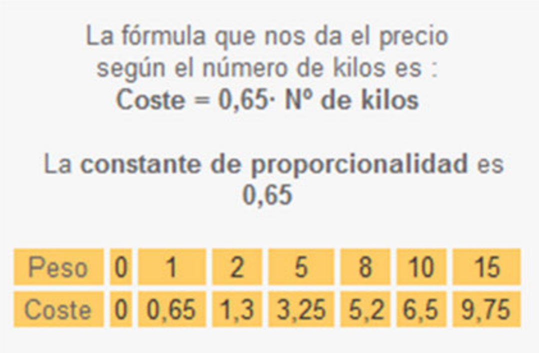
Precio total =nº de unidades · precio unidad

Más ejemplos de proporcionalidad directa

En la vida cotidiana es frecuente encontrar situaciones de proporcionalidad directa. En la página anterior has podido ver un ejemplo: el precio que debemos pagar por el precio de la gasolina al repostar. Se presentan a continuación otras situaciones.

- *Si un kilo de patatas cuesta 0,65 euros, dos kilos nos costarán el doble, tres kilos el triple...* Es una situación de **proporcionalidad directa**, pues *el gasto es proporcional al precio/kg.*

El **coste** y el **peso** son cantidades variables, sin embargo hay una *cantidad constante* **0,65**, que es el precio de un kilo de patatas. Esta cantidad es la **constante de proporcionalidad**.



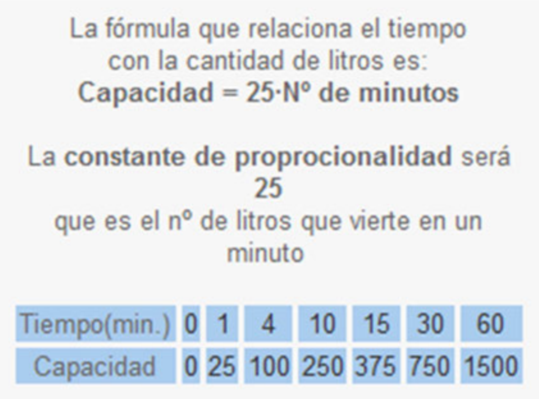
La fórmula que nos da el precio según el número de kilos es :
Coste = 0,65· Nº de kilos

La **constante de proporcionalidad** es **0,65**

Peso	0	1	2	5	8	10	15
Coste	0	0,65	1,3	3,25	5,2	6,5	9,75

- *Un estanque se llena con un grifo que vierte 25 litros por minuto*. La **cantidad de agua** del estanque **depende** del **tiempo** que esté abierto el grifo.

Estas dos cantidades son **directamente proporcionales**, ya que en el doble, triple,... de tiempo hay el doble, triple,... respectivamente de litros en el estanque. El tiempo y la capacidad son variables y están relacionadas.



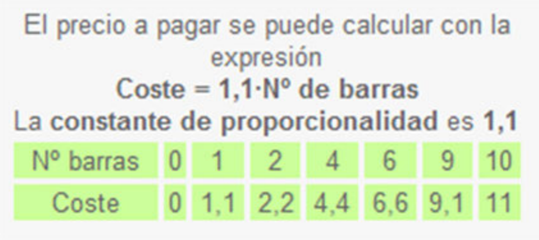
La fórmula que relaciona el tiempo con la cantidad de litros es:
Capacidad = 25·Nº de minutos

La **constante de proprocionalidad** será **25**
que es el nº de litros que vierte en un minuto

Tiempo(min.)	0	1	4	10	15	30	60
Capacidad	0	25	100	250	375	750	1500

- *Si una barra de pan cuesta 1,1 euros*. Lo que deberemos pagar en la panadería dependerá del número de barras.

Tenemos otra vez un *ejemplo* de variables (nº de barras y coste) **directamente proporcionales.**



El precio a pagar se puede calcular con la expresión
Coste = 1,1·Nº de barras
La **constante de proporcionalidad** es **1,1**

Nº barras	0	1	2	4	6	9	10
Coste	0	1,1	2,2	4,4	6,6	9,1	11

Las gráficas son las siguientes:

- Una **relación de proporcionalidad directa** se expresa como **y = m·x**, donde **x** e **y** representan las dos magnitudes que se relacionan y **m** es la **constante de proporcionalidad.**

Como has visto sus gráficas son *rectas que pasan por el origen de coordenadas.* En las tres tablas aparece el punto ***(0,0)***, si no abres el grifo, no sale agua, si no compras patatas o pan, tampoco pagas nada.

más...

Variables

- La variable **x** se llama **variable independiente**, puede tomar cualquier valor que queramos darle, En la gráfica sus valores se encuentran en el *eje de abscisas* (**eje X**).
- La **y** es la **variable dependiente** porque es el resultado que se obtiene para el valor de x. En las gráficas se encuentra en el *eje de ordenadas* (**eje Y**).

Al dividir **y** entre **x** obtenemos **m**, la **constante de proporcionalidad directa**. En las gráficas se llama **pendiente**, ya que nos dice cómo de inclinada estará la recta.

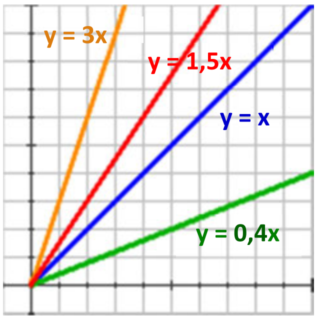
En esta tabla vamos a relacionar la fórmula resumen con las situaciones que hemos estudiado:

x	y	m	y = m · x
Nº de kilos	Coste a pagar	0,65	Coste = 0,65 · nº kilos
Nº de minutos	Agua en el estanque	25	Capacidad = 25 · nº minutos
Nº de barras	Coste	1,1	Coste = 1,1 · nº de barras

La gráfica adjunta corresponde al modelo de cualquier relación de proporcionalidad directa.

Al cambiar los valores de **m**, **constante de proporcionalidad**, se comprueba cómo varía la inclinación de la recta.

En nuestros problemas *cuanto mayor es la constante de proporcionalidad*, más precio tenemos que pagar por las patatas, el pan o la gasolina, más agua vierte el grifo,...



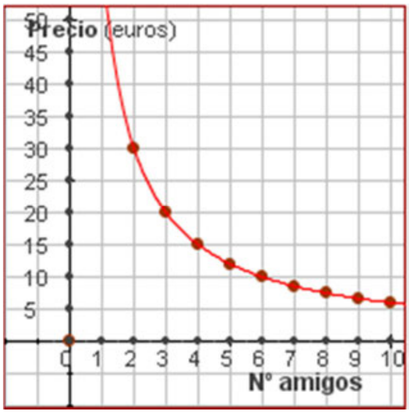
Proporcionalidad inversa

Hay muchas situaciones en las que la proporcionalidad directa no nos sirve para explicar y resolver los problemas. Uno de ellos es el reparto del dinero en el coste de una excursión o en una fiesta, el cálculo del área de un rectángulo, el pago de una factura de taxi, o de luz o de gas,...

Nos dedicaremos ahora a estudiar la PROPORCIONALIDAD INVERSA.

- En un grupo de fútbol proponen comprar un regalo para el entrenador por valor de 60 euros. No saben si participarán todos por lo que hacen la siguiente tabla:

Nº participantes	Paga cada uno
2	30
4	15
6	10
12	5
15	4

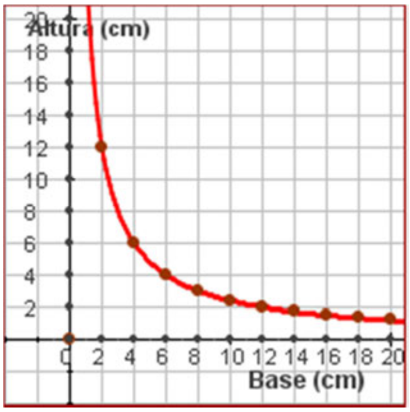


Es una tabla de proporcionalidad inversa pues se cumple que los productos son iguales:

2· 30 = 4 · 15 = 6 · 10 = 12 · 5 = 15 · 4 = 60

- Si nos piden calcular las dimensiones de los rectángulos cuya área es 24 cm², es un ejemplo de proporcionalidad inversa. Observa la tabla:

BASE	ALTURA
2	12
3	8
6	4
10	2,4
16	1,5



Se cumple la propiedad de las tablas de proporcionalidad inversa:

2 · 12 = 3 · 8 = 6 · 4 = 10 · 2,4 = 16 · 1, 5 = 24

Fíjate en la forma que adopta la gráfica en estos casos, es la rama de una curva llamada **hipérbola**.

Otras rectas

Hay otras situaciones cuyas **gráficas** son **rectas,** *por ejemplo* lo que se debe pagar en *el recibo de la luz, del gas, del teléfono, los taxímetros*,... En ellos el procedimiento para obtener lo que hay que pagar consiste en añadir una cantidad fija, por el servicio, al precio del consumo (litros, metros cúbicos, tiempo, distancia...). En estos casos las **magnitudes no son directamente proporcionales,** ya que aparece una constante fija.

Otras situaciones que dan lugar a rectas, distintas de las anteriores son la que aparecen en el pago de **tarifa plana** en telefonía, **el pago de una sociedad médica**, la **cuota de un gimnasio** al que puedes asistir cuanto quieras,...

Tenemos pues que no solamente las relaciones de proporcionalidad directa se pueden representar por rectas. A continuación tienes unos ejemplos, las gráficas representan lo que se pagaría en tres tipos de tarifas de telefonía móvil, según los minutos que se hable. ¿Cuál crees que es mejor oferta?.

Precio = **24 €**
Tarifa plana

Precio = **0,7 · x**

Precio = **0,5 · x + 1**

x es el tiempo que se habla

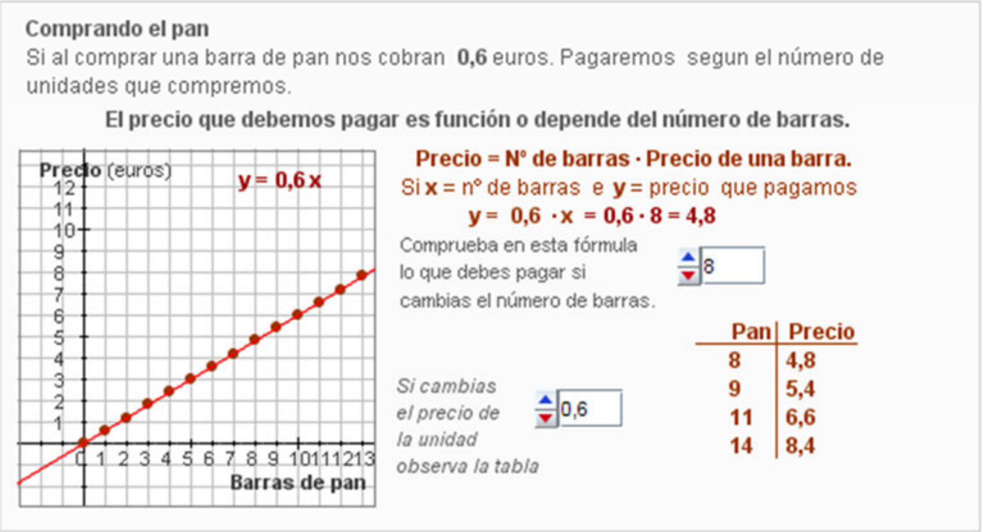
- **Observa** que aparece una fórmula del tipo: **y = m · x + b**

  Donde hemos llamado ***x*** al *tiempo*, y al *precio* que hay que pagar por el servicio ***y***.

  Una de las gráficas que aparece es una **gráfica de proporcionalidad directa**, que es lo que tendríamos que pagar si *sólo nos cobraran por el gasto hecho.*

Más ejemplos

A continuación tienes unos problemas resueltos con gráficas de los tipos que hemos trabajado.



Comprando el pan

Si al comprar una barra de pan nos cobran **0,6** euros. Pagaremos segun el número de unidades que compremos.

El precio que debemos pagar es función o depende del número de barras.

Precio = Nº de barras · Precio de una barra.

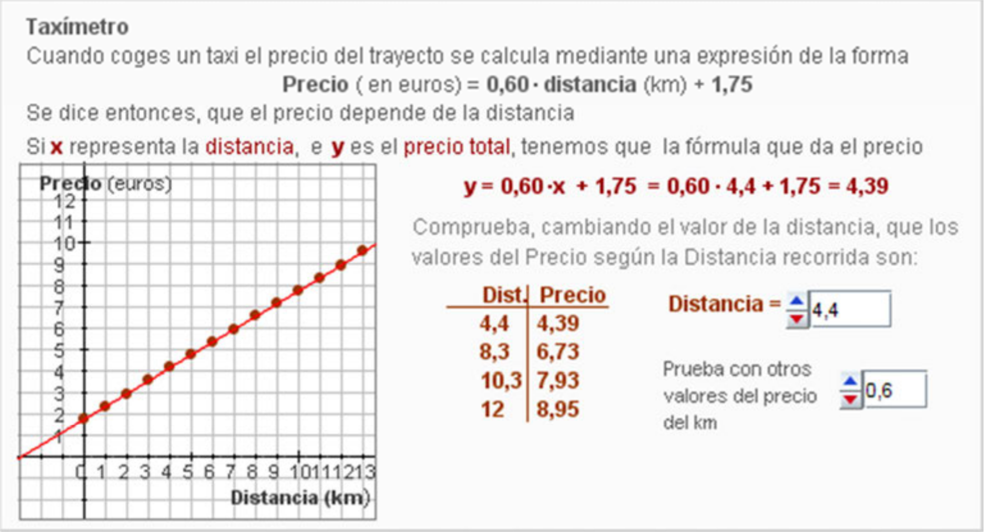
Si **x** = nº de barras e **y** = precio que pagamos

y = 0,6 · x = 0,6 · 8 = 4,8

Comprueba en esta fórmula lo que debes pagar si cambias el número de barras. 8

Si cambias el precio de la unidad observa la tabla 0,6

Pan	Precio
8	4,8
9	5,4
11	6,6
14	8,4



Taxímetro

Cuando coges un taxi el precio del trayecto se calcula mediante una expresión de la forma

Precio (en euros) = **0,60 · distancia** (km) + **1,75**

Se dice entonces, que el precio depende de la distancia

Si **x** representa la distancia, e **y** es el precio total, tenemos que la fórmula que da el precio

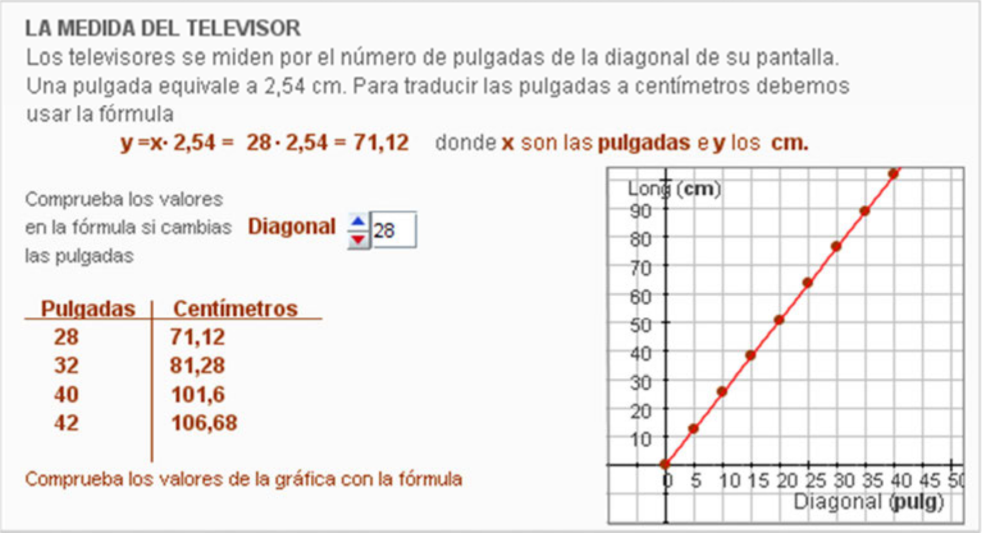
y = 0,60 ·x + 1,75 = 0,60 · 4,4 + 1,75 = 4,39

Comprueba, cambiando el valor de la distancia, que los valores del Precio según la Distancia recorrida son:

Dist.	Precio
4,4	4,39
8,3	6,73
10,3	7,93
12	8,95

Distancia = 4,4

Prueba con otros valores del precio del km 0,6



LA MEDIDA DEL TELEVISOR

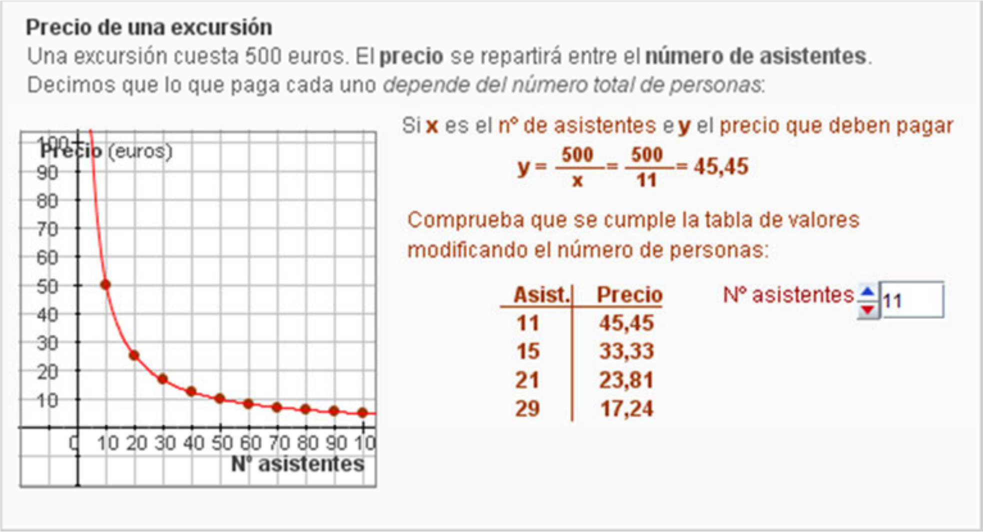
Los televisores se miden por el número de pulgadas de la diagonal de su pantalla. Una pulgada equivale a 2,54 cm. Para traducir las pulgadas a centímetros debemos usar la fórmula

y =x· 2,54 = 28 · 2,54 = 71,12 donde **x** son las **pulgadas** e **y** los **cm.**

Comprueba los valores en la fórmula si cambias las pulgadas **Diagonal** 28

Pulgadas	Centímetros
28	71,12
32	81,28
40	101,6
42	106,68

Comprueba los valores de la gráfica con la fórmula



Precio de una excursión

Una excursión cuesta 500 euros. El **precio** se repartirá entre el **número de asistentes**.

Decimos que lo que paga cada uno *depende del número total de personas*:

Si **x** es el nº de asistentes e **y** el precio que deben pagar

$$y = \frac{500}{x} = \frac{500}{11} = 45,45$$

Comprueba que se cumple la tabla de valores modificando el número de personas:

Asist.	Precio
11	45,45
15	33,33
21	23,81
29	17,24

Nº asistentes 11

4. Gráficos estadísticos

Muchas veces la *información* que aparece en los **medios de comunicación** se expresa a través de una **gráfica**. Las **gráficas** tienen *distintas características* según el tema en el que se aplica. Si se pretende dar resultados de una votación o de una encuesta de opinión, la distribución de los partidos políticos en el congreso, la dedicación a las tareas de la casa de los miembros de una familia o cómo han evolucionado los precios o el turismo..., entre otros ejemplos, se utilizan las **gráficas estadísticas.**

A continuación aparecen algunos gráficos relacionados con el turismo el pasado año 2009.

- A la derecha en este **grafico de sectores** aparecen los *tipos de alojamientos que utilizaron los turistas extranjeros que visitaron nuestro país en 2009.*

Los hoteles representaron el alojamiento más usado con gran diferencia respecto de los otros. Casi tres veces el siguiente en importancia

Las otras **modalidades** fueron:

Vivienda propia o o de familiares
Vivienda alquilada
Otros alojamientos
Y un apartado sin especificar.

Fuente: Instituto de Estudios Turísticos

- El **mapa** adjunto nos da una idea muy clara de cuál fue la *distribución hotelera en el año 2009 según comunidades.*

Los diferentes tonos de verde nos diferencian unos de otros. En la parte inferior aparece el código para interpretarlo.

*Las **islas Baleares y las Canarias** fueron las que tuvieron más ocupación hotelera.*
***Cataluña y la Comunidad Valenciana** les siguen en cantidad.*
***Andalucía, Madrid, Cantabria, Euskadi y la Rioja** ocupan el tercer lugar.*

- Por último tenemos un **gráfico de barras** horizontales en el que podemos ver las *nacionalidades de los turistas que utilizaron los hoteles*.

*Los turistas procedentes de **Alemania y el Reino Unido** representan un poco más del 50% de la ocupación hotelera.*

*Los otros tres países, **Francia, Italia y Países Bajos**, tienen, entre sí, un grado de ocupación parecida . Se nota una diferencia importante con los dos primeros. Entre los tres el porcentaje de ocupación es menor que el de Reino Unido.*

Los datos vienen dados en porcentajes.

*Los datos proceden de los estudios que publica anualmente el **INE** (Instituto Nacional de Estadística)*

más...

Estadística

La **ESTADÍSTICA** es la ciencia que se ocupa de recoger, organizar y analizar gran volumen de datos, para describir una situación y obtener conclusiones.

Diariamente en los medios de comunicación podemos ver diferentes **"estadísticas"** que son resultados de estudios sobre algunos aspectos de la vida cotidiana.

El **INE** (Instituto Nacional de Estadística) se dedica a estudiar todos los aspectos políticos, sociales y económicos de la realidad cotidiana.

La palabra estadística es una palabra derivada de Estado y se refería a los datos numéricos (por ejemplo los Censos de población) que se elaboran desde la antigüedad. Los dos últimos siglos le han añadido otros significados.

4.1. Recuento

Tablas de frecuencias

Marta ha tenido que hacer un trabajo para clase de Matemáticas. Decidió recoger información entre los compañeros y compañeras de clase preguntándoles cuántos televisores había en su clase.

Este tipo de estudio se llama estudio estadístico y ha seguido los pasos siguientes:

- *En primer lugar* decidió el **colectivo o población** donde iba a hacer el trabajo: *su clase.*
- *En segundo lugar* eligió el *tema de estudio*, que se llama **carácter estadístico o variable estadística.**

Como sólo eran 20 en su clase preguntó a cada uno cuántos televisores tenían cada uno en casa. Obtuvo el siguiente resultado:

1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 2

Cada uno de estos resultados se llama ***dato estadístico***.

Vemos que hay un alumno que no tiene televisor y otro que tiene cuatro televisores. Hay ocho personas que tienen 2 televisores y 6 con tres.

- La **frecuencia absoluta** de un dato estadístico es el número de veces que aparece dicho dato.

  Así, la frecuencia absoluta del 2 es *8* y la de 3 es *3*.

Pero esta frecuencia no nos informa de la relación de un dato con los demás, para ello usamos:

- La **frecuencia relativa** que se obtiene la frecuencia absoluta entre el tamaño de la población.

  En este caso dividiremos entre *20*.

Todos los datos recogidos se ordenan en una tabla de la forma siguiente:

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	2	0,1
1	6	0,3
2	8	0,4
3	3	0,15
4	1	0,05
SUMA	**20**	**1**

Esta tabla se denomina
TABLA ESTADÍSTICA

más…

Vocabulario

Dentro de la Estadística necesitamos conocer una serie de palabras que facilitan la trasmisión de informaciones:

Colectivo o Población
Muestra
Individuo
Variable estadística
Variable cualitativa
Variable cuantitativa
Modalidades
Valores
Recuento
Frecuencia absoluta
Frecuencia relativa
Porcentaje

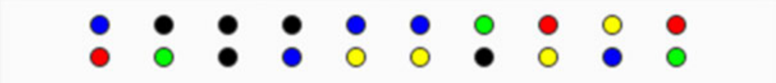
En la siguiente dirección:

www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/index.html

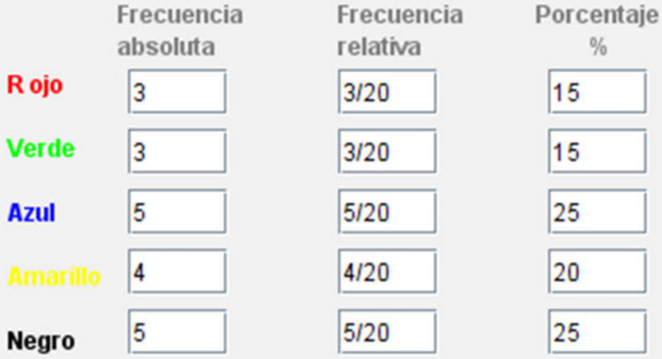
encontrarás un diccionario de términos matemáticos y podrás completar la información de estos conceptos.

Ejemplo

- *Se ha preguntado a 20 personas sobre su color favorito, resultando los datos siguientes:*



Hacemos el recuento y calculamos las frecuencias relativas y los porcentajes. Observa que para calcular el porcentaje basta multiplicar la frecuencia relativa por 100.



	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
R ojo	3	3/20	15
Verde	3	3/20	15
Azul	5	5/20	25
Amarillo	4	4/20	20
Negro	5	5/20	25

Ahora comprueba el recuento y la tabla de frecuencias de un estudio estadístico de una clase.

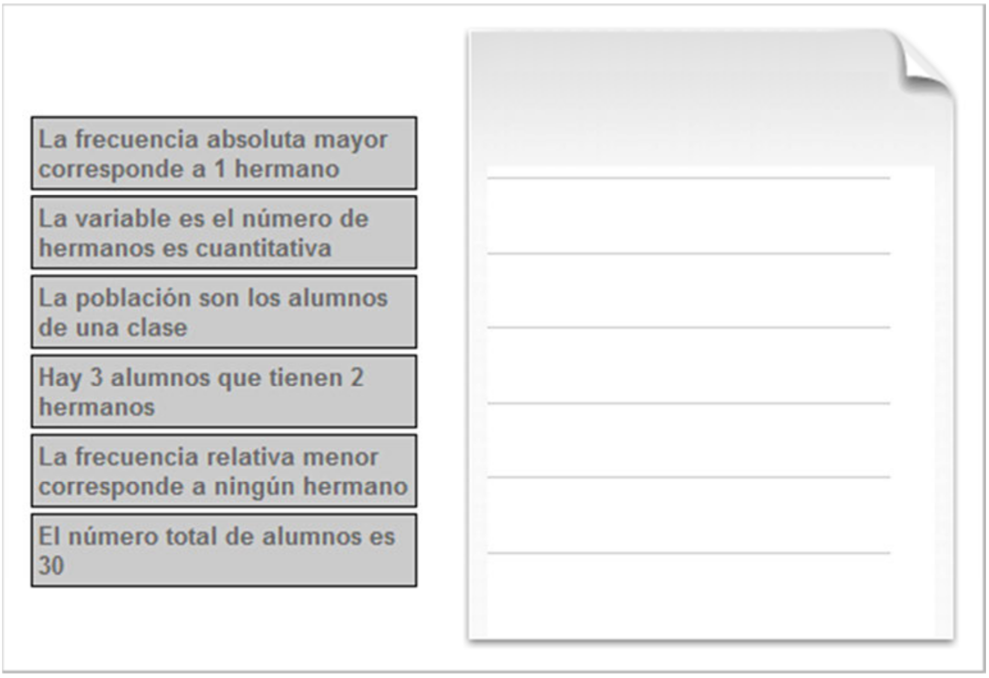
Número de hermanos del alumnado de una clase

2	1	3	1	0
1	1	2	0	1
1	3	1	1	2
0	1	0	1	0

	0	1	2	3	total
frecuencia absoluta	5	10	3	2	20
frecuencia relativa	$\frac{5}{20}=0{,}25$	$\frac{10}{20}=0{,}5$	$\frac{3}{20}=0{,}15$	$\frac{2}{20}=0{,}1$	1

Elige las correctas

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas en el estudio de la clase?



La frecuencia absoluta mayor corresponde a 1 hermano

La variable es el número de hermanos es cuantitativa

La población son los alumnos de una clase

Hay 3 alumnos que tienen 2 hermanos

La frecuencia relativa menor corresponde a ningún hermano

El número total de alumnos es 30

Practica

8) *Efectúa el recuento de los siguientes datos que corresponden al número de calzado de 20 personas. Calcula también las frecuencias relativas y los porcentajes.*

39 39 37 38 40 38 36 36 37 40 39 39 39 37 36 38 40 37 40 39

9) *Los alturas en cm de 20 personas son las siguientes. Completa la tabla.*

189 186 158 155 186 162 176 156 161 156
183 169 182 153 162 157 157 183 172 177

altura	Frec. absoluta	Frec. relativa	Porcentaje
150 - 160			
160 - 170			
170 - 180			
180 - 190			

más...

Tipos de variables estadísticas

Básicamente se pueden clasificar en dos tipos:

- **Variables cualitativas**: se refieren a **cualidades** o **características** que no se pueden medir con números.

Deporte preferido, aficiones, estudios que quieres seguir, el estado civil, los partidos políticos en unas elecciones, datos de audiencia de las televisiones...

Dentro de una variable cualitativa la población se distribuye en distintas **modalidades**.

Por ejemplo: en el estudio sobre el deporte favorito, las modalidades serían *fútbol, baloncesto, tenis, golf, natación, atletismo y ajedrez.*

- **Variables cuantitativas**: que se puede expresar mediante un **número**.

Peso, estatura, número de calzado, número de hermanos, número de electrodomésticos de los hogares,...

Comprueba

8.

Nº	f	fr	%
36	3	0,15	15
37	4	0,20	20
38	3	0,15	15
39	6	0,30	30
40	4	0,20	20

9.

Nº	f	fr
150-160	7	0,35
160-170	4	0,20
170-180	3	0,15
180-190	6	0,30

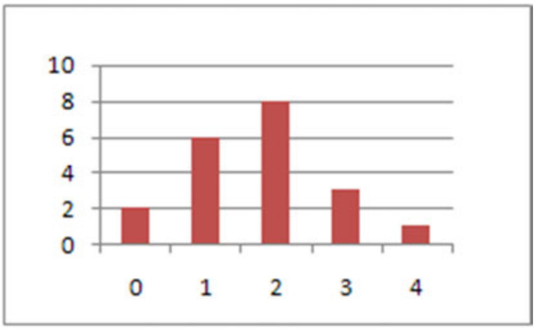
4.2. Diagrama de barras

Para obtener una visión global de los datos contenidos en una tabla estadística se representan gráficamente. Hay varios tipos de gráficas: *diagrama de barras, diagrama de sectores, histograma, polígono de frecuencias y pictogramas*.

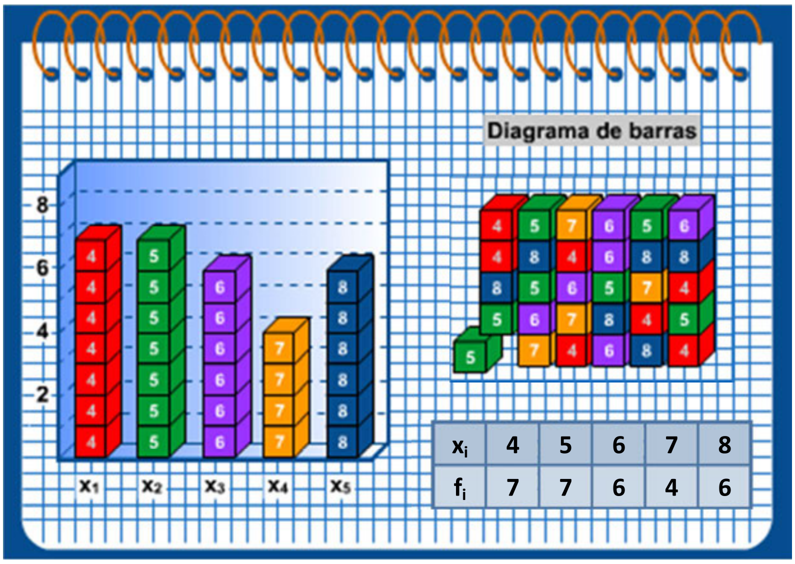
- Un **diagrama de barras** es un gráfico formado por barras de altura proporcional a la frecuencia de cada valor. Se utilizan datos cuantitativos y datos cualitativos.

  Para el trabajo de Marta:

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	2	0,1
1	6	0,3
2	8	0,4
3	3	0,15
4	1	0,2
Suma	20	1



En una clase los resultados en un examen de matemáticas han sido los siguientes. Cada dato viene representado por un cubito en la imagen, observa cómo se hace el recuento y se construye en diagrama de barras.

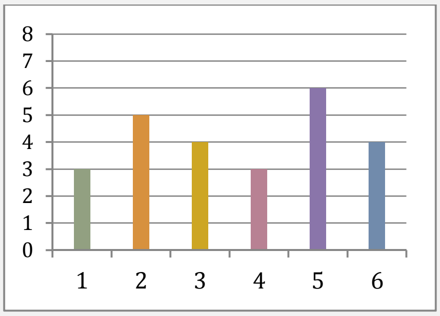


x_i	4	5	6	7	8
f_i	7	7	6	4	6

Ejemplo

- *Hemos tirado un dado 25 veces, los resultados se reflejan en la tabla de frecuencias y diagrama de barras correspondiente.*

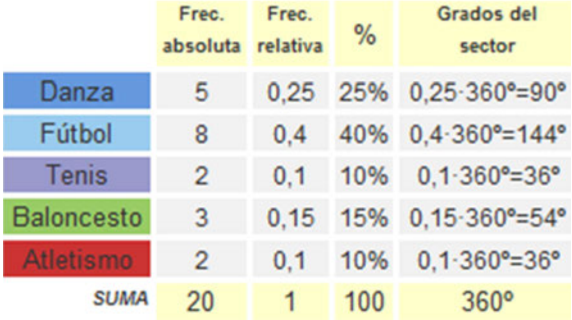
número	*frecuencia absoluta*	*frecuencia relativa*
1	3	0,12
2	5	0,2
3	4	0,16
4	3	0,12
5	6	0,24
6	4	0,16



4.3. Diagramas de sectores

- Un **diagrama de sectores** es un gráfico que consiste en un círculo dividido en sectores de amplitud proporcional a la frecuencia de cada valor. Se utiliza con datos cualitativos y cuantitativos.

Un compañero de Marta decidió preguntar a sus compañeros por su deporte favorito y obtuvo los datos, que aparecen en la tabla siguiente:



	Frec. absoluta	Frec. relativa	%	Grados del sector
Danza	5	0,25	25%	0,25·360º=90º
Fútbol	8	0,4	40%	0,4·360º=144º
Tenis	2	0,1	10%	0,1·360º=36º
Baloncesto	3	0,15	15%	0,15·360º=54º
Atletismo	2	0,1	10%	0,1·360º=36º
SUMA	20	1	100	360º

Observa: *la suma de todas las amplitudes es 360º, la amplitud total del círculo.*

- Para calcular la graduación de los sectores podemos usar tres procedimientos:

$$\textbf{Grados del sector} = \textbf{frecuencia relativa} \cdot 360°$$

- Usando la proporción con las frecuencias absolutas

$$\frac{\textbf{frecuencia absoluta}}{\textbf{total de datos}} = \frac{\textbf{grados del sector}}{360°}$$

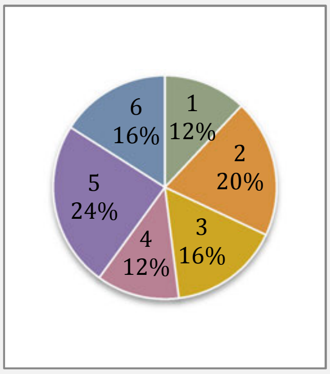
- bien usando la proporción con porcentajes:

$$\frac{\textbf{porcentaje del dato}}{100\%} = \frac{\textbf{grados del sector}}{360°}$$

Ejemplo

- *El diagrama de sectores para el ejemplo del dado del apartado anterior es el de la figura:*

número	*frecuencia absoluta*	*frecuencia relativa*	*Grados del sector*
1	3	0,12	43º 12’
2	5	0,2	72º
3	4	0,16	57º 36’
4	3	0,12	43º 12’
5	6	0,24	86º 24’
6	4	0,16	57º 36’



Practica

10) *Dibuja el diagrama de barras de los datos del ejercicio 8, sobre el número de calzado de 20 personas.*

11) *Dibuja también el diagrama de sectores para los mismos datos.*

más...

Construcción de un diagrama de sectores

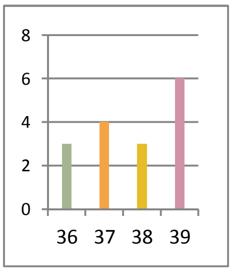
- Se dibuja una circunferencia
- Se calcula la amplitud de cada sector circular. Para ello se reparten los 360º proporcionalmente a las frecuencias de los datos.
- Hay varios procedimientos para determinar los grados.
  - Multiplicando la frecuencia relativa por 360º
  - Planteando la proporción:

$$\frac{\textbf{f.absoluta}}{\textbf{total de datos}} = \frac{\textbf{grados sector}}{360°}$$

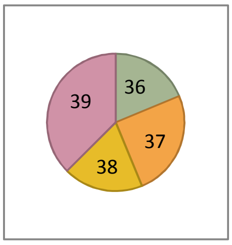
- Obtenida la graduación se dibuja cada sector usando el transportador.
- Se anota en cada sector el dato y su frecuencia o porcentaje.

Comprueba

10.



11.

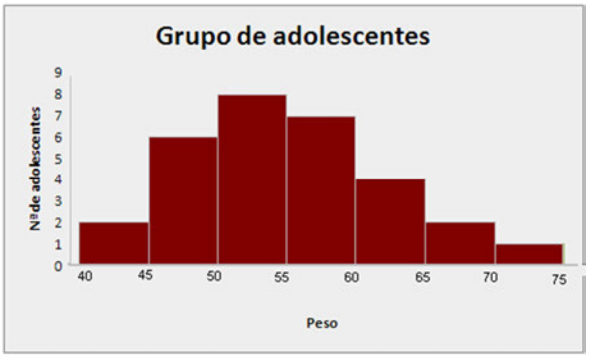


4.4. Otros gráficos

Podemos encontrar otros gráficos como:

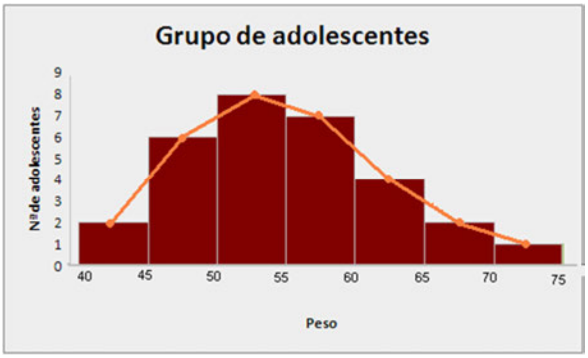
- El **histograma** está formado por rectángulos que se adosan unos a otros. Sirve para representar variables numéricas que tomen muchos valores diferentes.

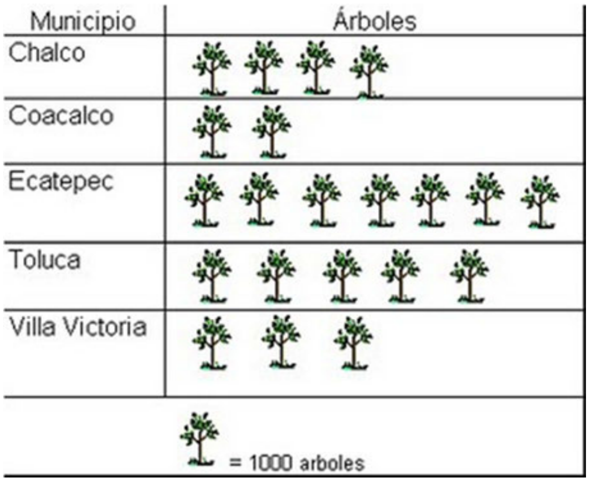
  En el eje horizontal se colocan los valores de la variable y en el eje vertical valores proporcionales a la frecuencia absoluta



- El **polígono de frecuencias** se usa para representar variables cuantitativas (numéricas).

  Se construye uniendo los extremos de las barras o los puntos medios de los rectángulos del histograma





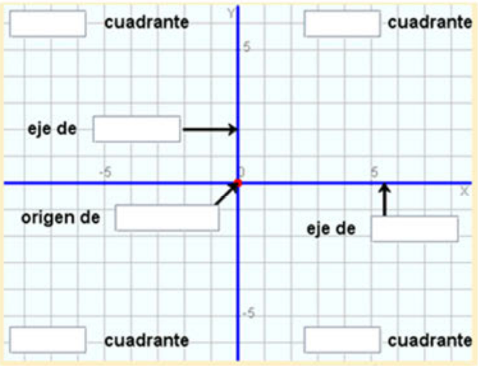
- El **pictograma** se usa cuando los datos son cualitativos y se sustituyen las barras del diagrama de barras por dibujos relacionados con el estudio.

  El **tamaño** de los dibujos es proporcional a la frecuencia o aparecen más dibujos para representarla.

  No son unos gráficos muy exactos pero son muy atractivos visualmente

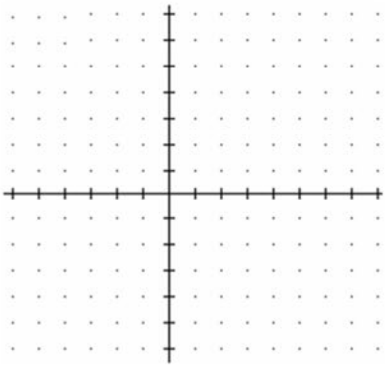
Ejercicios

1. *Escribe en cada recuadro de la figura siguiente el nombre que corresponda*



2. *a) Representa en los ejes los puntos cuyas coordenadas son:*

A(1, 3), B(0, 2), C(5, 2), D(2, -2), E(3, 1)
F(-1, 3), G(3, 0), H(1, -3), I(-2, -5),
J(0, -2), K(-1,-3), L(-3, 0), M(1, 1), N(7, -2)



b) ¿Qué puntos tienen la misma abscisa que el punto A?

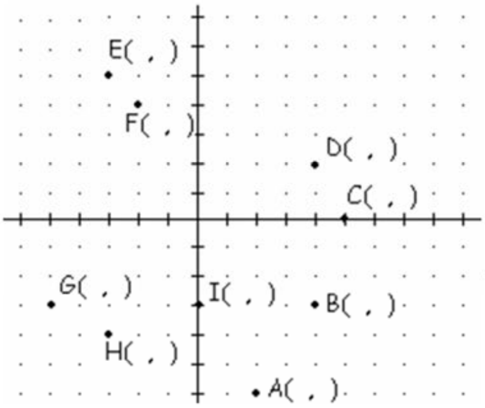
c) ¿Qué puntos están en el tercer cuadrante?

d) ¿Qué puntos están en el eje de ordenadas?

e) ¿Qué punto tiene la ordenada mayor? ¿Y la abscisa menor?

f) ¿Qué punto tiene ordenada opuesta al F?

3. *a) Escribe las coordenadas de los puntos representados en el diagrama:*



b) ¿Qué puntos tienen la misma abscisa?.

c) ¿Qué puntos están en el segundo cuadrante?

d) ¿Qué punto tiene la abscisa mayor?. ¿Y la ordenada menor?

e) ¿Qué puntos tienen ordenada opuesta al punto H? ¿Y ordenada opuesta a B?

f) ¿Qué puntos están en los ejes?

4. *a) Di en qué cuadrantes están los siguientes puntos: A(-2, 1), B(4, -3), C(5,2), D(-2, -1) sin dibujarlos.*

b) Dibuja cinco puntos que tengan como ordenada 3, ¿dónde están situados?

c) Dibuja cuatro puntos en el eje de abscisas, ¿qué tienen en común?

d) Dibuja seis puntos que tengan iguales la abscisa y la ordenada, ¿dónde están situados?

e) Dibuja dos puntos que tengan abscisas opuestas, ¿dónde están situados?

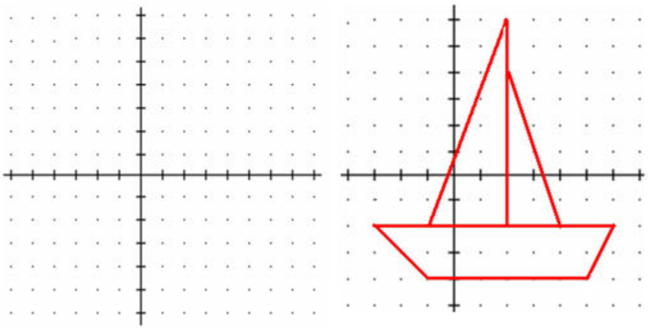
f) Dibuja dos puntos con ordenadas opuestas, ¿cómo están situados?

5. *Para transmitir un dibujo Laura ha decidido usar las coordenadas de los vértices del mismo. Le ha pasado a su compañero Juan el siguiente conjunto de puntos:*

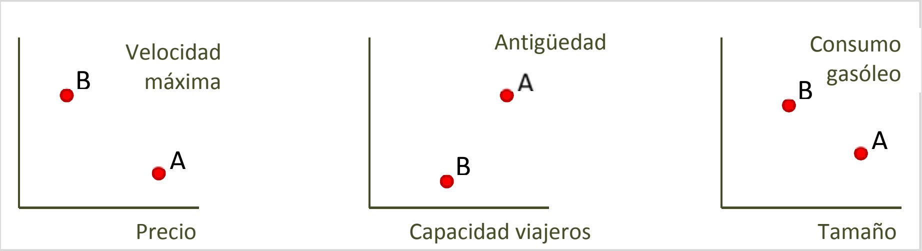
(-2, 4) →(0,2) →(4,2) →(0,2) →(0,0) →(0,-2) →(-2,0) →(-2,2) →(-4,2) →(-2,4)

a) Construye el dibujo uniendo los puntos en el mismo orden en que están escritos

b) Escribe la sucesión de puntos para dibujar el barco de la figura.



6. *Si A y B representan dos modelos de autobuses cuyos datos aparecen reflejados en los diagramas siguientes. Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*



Ayuda: elige en cada caso el diagrama más adecuado para comparar las magnitudes

a) El que alcanza más velocidad es el más barato.

b) El de mayor capacidad es el más moderno

c) El que más consume es el más pequeño

d) El autobús más viejo es el más caro

e) El más rápido es el más pequeño

f) El que más consume es el más caro

7. *Los puntos A(2, 1) B(6, 3) y C(4, 7) son tres de los vértices de un cuadrado.*

g) Determina las coordenadas del cuarto vértice y del centro del cuadrado.

h) Dibuja en el segundo cuadrante un cuadrado simétrico respecto del eje de ordenadas y halla las coordenadas de sus vértices.

i) Dibuja un cuadrado simétrico respecto del eje de abscisas y obtén sus coordenadas.

8. *El perímetro de un rombo depende del lado. Completa la tabla siguiente y representa los datos en unos ejes de coordenadas*

Lado del rombo (cm)	*0,5*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Perímetro					*16*	
Punto					*(4, 16)*	

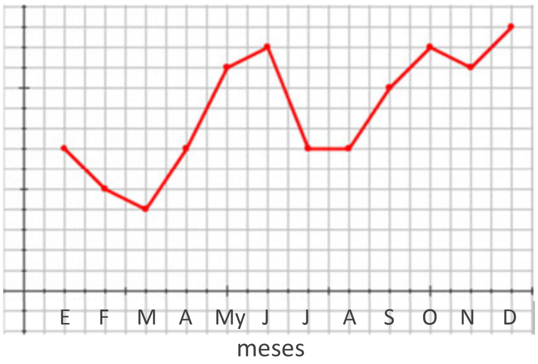
Repite la actividad anterior para el área del cuadrado.

9. *Una de las etapas de la vuelta ciclista a Murcia discurrió entre Las torres de Cotillas y Alhama de Murcia. Algunos de los datos de esta etapa están en la tabla siguiente:*

Localidad	***Punto kilométrico***	***Altitud(m)***
Las Torres de Cotillas	*0*	*50*
El Rellano	*34*	*350*
Ojós	*63*	*150*
Archena	*69*	*140*
Alto del Pliego	*97*	*465*
Control de avituallamiento	*110*	*210*
Alto de España	*125*	*700*
Alto del Collado Bermejo	*134*	*1150*
Alhama de Murcia	*167*	*210*

- a) *Representa los datos en unos ejes y confecciona el perfil de la etapa.*
- b) *¿En qué punto kilométrico la altitud del recorrido es mínima?. ¿Y máxima?.*
- c) *¿Qué desnivel tienen que superar entre el alto de España y el Alto del Collado Bermejo?. ¿Es mayor que el que tiene que superar entre Archena y Alto del Pliego?*
- d) *¿Qué distancia hay entre Ojós y el control de avituallamiento? ¿Y entre Archena y el Alto de España?*

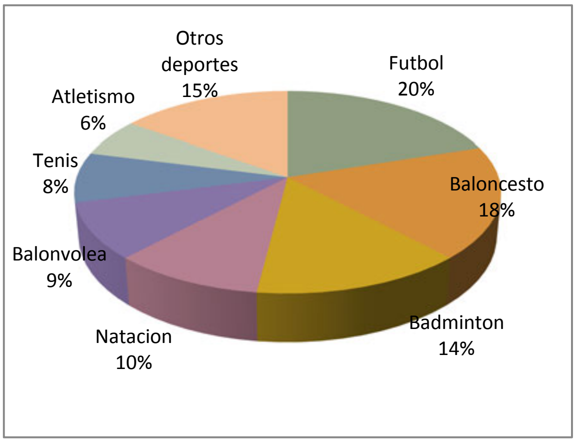
10. *La siguiente gráfica muestra las ventas hechas por una empresa durante un año, la escala del eje de ordenadas viene dada en miles de euros*



- a) *Si cada cuadro del eje de ordenadas representa 1000 euros ¿cuánto se consiguió vender en Mayo? ¿Y en Noviembre?*
- b) *¿En qué mes se consiguió el máximo de ventas? ¿Y el mínimo?*
- c) *¿En qué meses se vendió lo mismo?*
- d) *¿En qué trimestres se registró un aumento de ventas?*
- e) *¿Entre qué meses descendieron?*

11. *En un club juvenil se ha estudiado la distribución de los deportes que se practican obteniéndose los datos que aparecen en el gráfico de sectores siguiente:*

- a) *¿Cuáles son los deportes que cuentan con más participantes?.*
- b) *¿Qué deportes tienen menos del 10% de participantes?.*
- c) *¿Es la petanca un deporte con muchos jugadores?. ¿Y el tiro con arco?.*
- d) *Si hay 300 socios, ¿cuántos practican cada deporte? (Cada socio sólo puede participar en un deporte).*



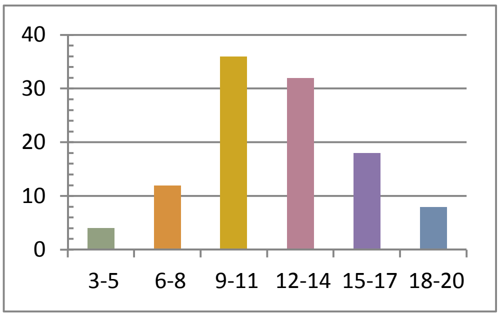
12. *En la biblioteca han hecho un recuento del número de libros leídos por menores de 20 años que han acudido en la última quincena, obteniéndose los datos que aparecen en la gráfica:*

a) ¿Cuántos libros han leído los jóvenes entre 12 y 14 años?. ¿Y entre 3 y 5?

b) ¿En qué edades se ha leído más de 20 libros?

c) ¿A qué edades se ha leído menos de 10 libros?

d) ¿Cuál sería aproximadamente el número total de libros leídos?



13. *Construye el diagrama de sectores y el diagrama de barras correspondientes a los siguientes datos obtenidos al preguntar a un grupo de personas sobre el medio de transporte utilizado en sus últimas vacaciones.*

Medio	***coche***	***tren***	***autobús***	***avión***	***barco***	***moto***
Nº personas	*50*	*20*	*15*	*8*	*5*	*2*

14. *En las tablas siguientes aparecen las relaciones entre dos magnitudes. Determina en cada caso si son de proporcionalidad directa o inversa y represéntalas en unos ejes de coordenadas.*

a) El precio de las naranjas en la frutería.

Naranjas (kg)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Precio (euros)		*1,6*			*4*	

b) Un padre da a sus hijos 60 para repartir entre ellos

Nº hermanos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Dinero recibido por cada uno de los hermanos	*60 €*				*12 €*	

c) En un rectángulo de base fija se consideran las alturas y áreas siguientes:

Altura (cm)	*3*	*5*	*6*	*7*		*20*
Área (cm^2)	*15*				*50*	

d) Las entradas del cine

Nº entradas	*1*	*2*	*3*	*4*		*18*
Precio (euros)			*12,6*		*50,4*	

e) En un rectángulo de área igual a 36 cm^2*, la base y la altura pueden ser*

Altura (cm)	*3*	*4*	*6*	*18*		
Base (cm^2)	*12*				*8*	*6*

15. *En un examen hecho a dos clases diferentes, se han obtenido los siguientes datos:*

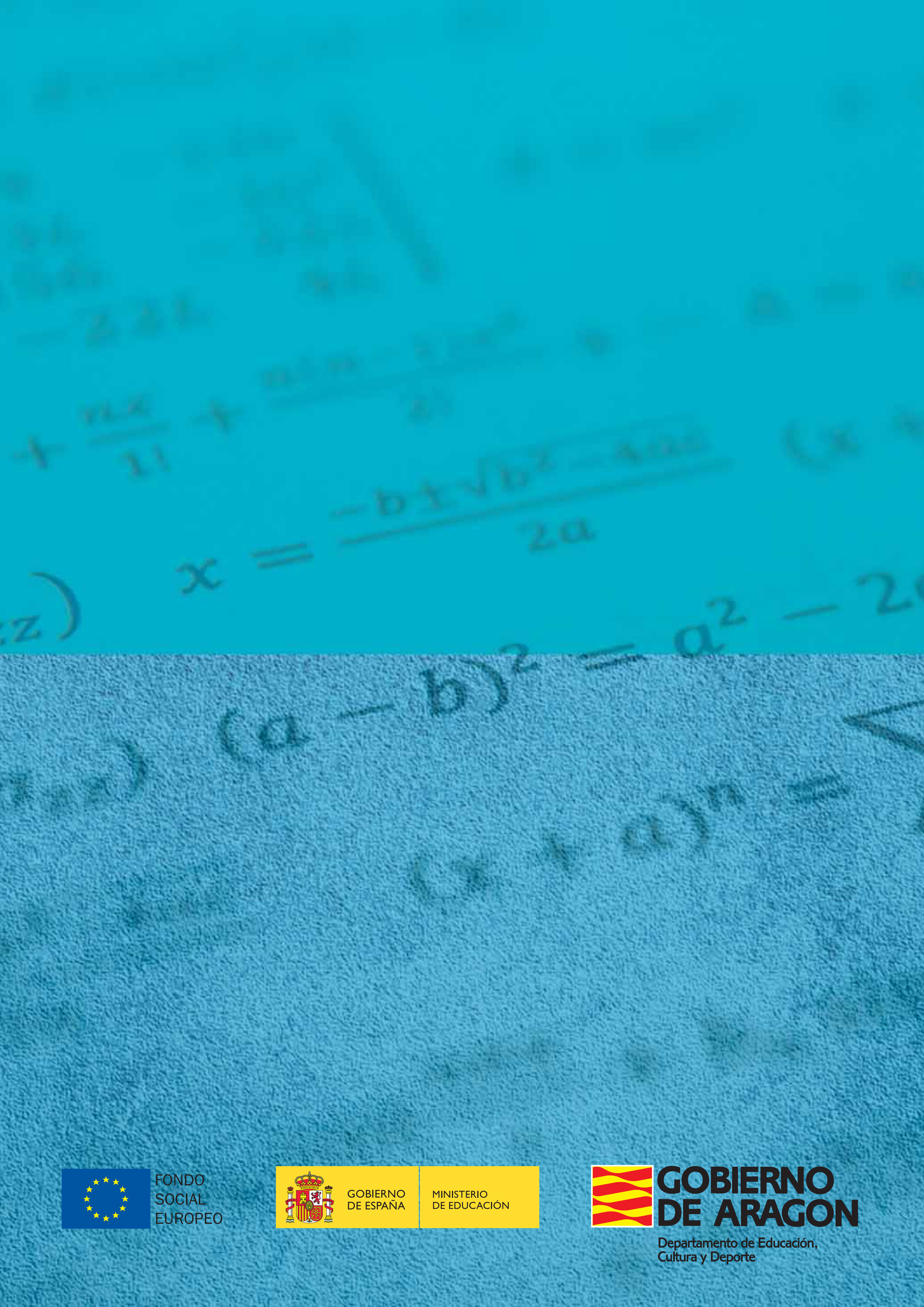
CLASE A: 1 alumno con nota 3; 3 con nota 5; 4 con nota 6; 2 con nota 7 y 2 con nota 8

CLASE B: 2 alumnos con un 4; 1 con nota 5; 5 con nota 6; 3 con nota 7 y 1 con nota 8.

a) Elabora una tabla con los datos de cada una de las clases.

b) Construye un diagrama de barras para cada una de las clases.

c) Calcula el porcentaje del número de aprobados (nota mayor o igual que 5) de cada una de las clases y compáralas.



FONDO
SOCIAL
EUROPEO

GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

GOBIERNO
DE ARAGON

Departamento de Educación,
Cultura y Deporte