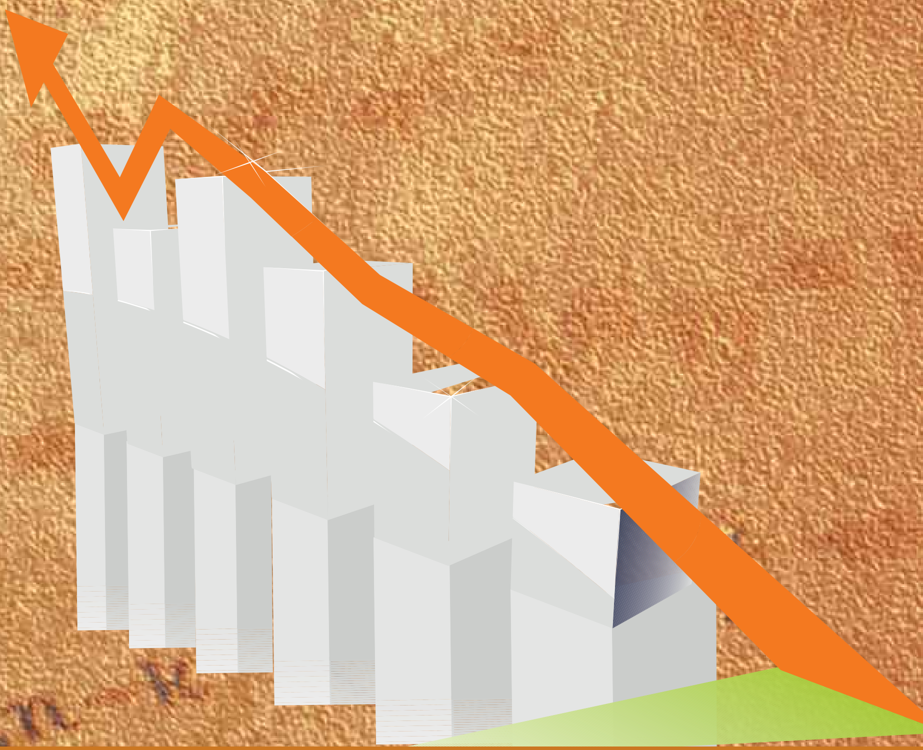
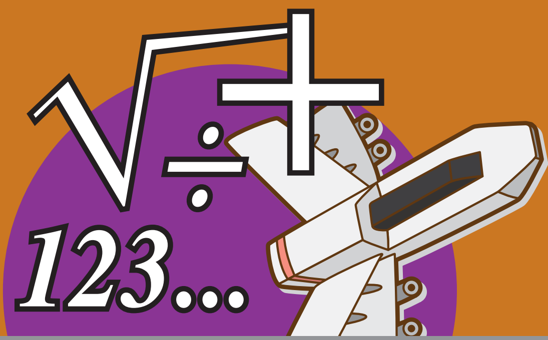


MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA



módulo 1

Educación Secundaria para Personas Adultas

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

Matemáticas y Tecnología

Educación Secundaria para Personas Adultas

1

módulo

Este material pertenece a la actuación *"Innovación educativa: materiales didácticos para el desarrollo de cursos on-line dirigidos a la población adulta"*, del Programa Operativo del Fondo Social Europeo del Gobierno de Aragón 2007-13

Primera edición marzo 2011

Autores:
– Dª Mª José García Cebrian, DNI 17685225-L, coordinadora y responsable de la elaboración de los contenidos de las unidades 1 y 6.
– Dª Francisco Javier Bosch Bernal, DNI 17445023-Y, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 5.
– Dª Juan María Gascón Vallés, DNI 25135096-Y, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 2.
– Dª Soledad Sanz López, DNI 17727299-A, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 4.
– D. Javier Sanz Seral, DNI 17732276-N, responsable de la elaboración de los contenidos de la unidad 3.

Diseño de maquetación:
María José García Cebrian

Diseño de cubierta:
INO reproducciones

Edita:
Gobierno de Aragón. Dirección General de Formación Profesional y Educación Permanente. Servicio de Educación Permanente y Formación del Profesorado.

Impreso en España.
Por: INO reproducciones

Esta publicación electrónica, corresponde al Ámbito Matemático-tecnológico para la obtención del título de Graduado Escolar en Educación Secundaria Obligatoria para las personas adultas.

ÍNDICE

Los números naturales 1

Comienzas el estudio de este bloque con números, tratándose de Matemáticas no podía ser de otra manera.

Si te paras un momento a pensar para qué utilizas los números en la vida diaria, te darás cuenta de que los utilizas continuamente. ¿Cuántos años tienes?, ¿qué día es hoy?, ¿en qué piso vives?, ¿a qué velocidad va tu coche?, ¿cuánto cuesta un billete de autobús?, ¿cuál es tu DNI?... Intenta imaginar un mundo sin números y verás que resulta imposible.

Los números que sirven para contar: uno, dos, tres, cuatro,..., se llaman naturales y estos son de los que trata esta unidad.

Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

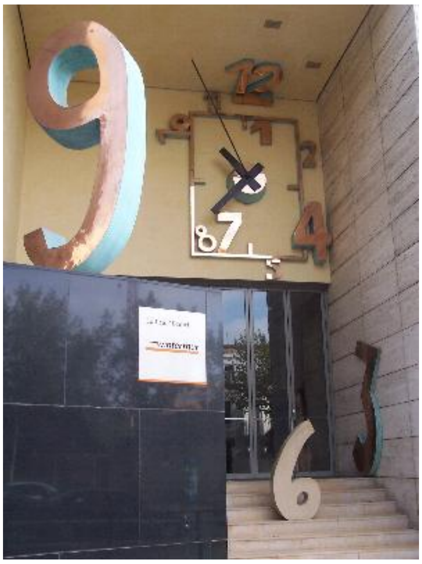
- *Leer y escribir números mediante el sistema de numeración decimal.*
- *Redondear números naturales.*
- *Sumar, restar, multiplicar y dividir con números naturales, y conocer las propiedades de estas operaciones.*
- *Saber el orden en que hay que efectuar las operaciones cuando aparecen combinadas.*
- *Calcular potencias de base y exponente natural.*
- *Conocer qué son los cuadrados perfectos y su raíz cuadrada.*
- *Resolver problemas donde intervienen operaciones con números naturales.*

Es muy importante que adquieras agilidad en el manejo de las operaciones, por eso conviene que practiques con lápiz y papel, utiliza la calculadora para comprobar tus resultados.

1. Números para contar y ordenar

Los números están presentes en nuestra vida cotidiana, los empleamos para:

- Identificar:
  "Mi DNI es 71114113"
  "Llámame al 966123123"
  "¿Código Postal?, 50010"
- Contar:
  "Hay 245 alumnos"
  "150 nuevos puestos de trabajo"
  "800 000 coches en la operación salida"
- Ordenar:
  "Ganó el 2º premio"
  "Vivo en el 9º piso"
  "Ocupa el 8º lugar en la clasificación"
- Medir:
  "De Barcelona a Madrid hay 623 km"
  "Necesitaré 2 metros de tela"
  "Esta garrafa es de 5 litros"



Estos números, que aparecen "naturalmente" al contar los elementos que hay en un conjunto se llaman **números naturales**.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 101, 102, 103, ..., 999, 1000,...\}$$

El conjunto de números naturales se designa con la letra **N** y tiene infinitos elementos, pues dado un número natural siempre puedes pensar en uno mayor.

Sistema de numeración decimal

El sistema de numeración que utilizamos actualmente es el **sistema de numeración decimal**.

Este sistema que tiene su origen en la India y fue introducido en Europa por los árabes en el siglo XIII, se caracteriza por:

- Cualquier número puede escribirse con sólo diez símbolos, llamados **cifras** o **dígitos**:
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Es **decimal** o de base 10, ya que 10 unidades de un determinado orden se agrupan para formar una unidad de orden inmediatamente superior.

Unidad	1 unidad
Diez unidades hacen una decena	1 decena = 10 unidades
Diez decenas hacen una centena	1 centena = 100 unidades
Diez centenas hacen un millar	1 millar = 1000 unidades
Diez millares hacen una decena de millar	1 decena de millar = 10 000 unidades
Diez decenas de millar hacen una centena de millar	1 centena de millar = 100 000 unidades
Diez centenas de millar hacen un millón	1 millón = 1 000 000 unidades

más...

Otros sistemas de numeración

La humanidad ha empleado distintos sistemas de numeración a lo largo de la historia. Egipcios, babilonios, griegos, romanos, mayas, chinos,..., todas las antiguas civilizaciones tenían su propio método para escribir y utilizar los números.

Números egipcios

Números chinos

De ellos los **números romanos** aún se utilizan como habrás podido ver en monumentos, relojes o textos.

- Es posicional ya que cada cifra tiene un valor relativo dependiendo de la posición que ocupe en el número.

  Así por ejemplo, en el número de la derecha la cifra 4 está dos veces, una en el lugar de las unidades y otra en el lugar de las decenas de millón. En el primer caso significa 4 unidades y en el segundo 40000000 unidades.

  En este sistema es fundamental el cero, 0, que significa la no existencia de algo, pero que añadido a la derecha de otra cifra cambia sustancialmente el valor de la misma.

145 673 294

unidad	4
decena	90
centena	200
unidad de mil	3000
decena de mil	70000
centena de mil	600000
unidad de millón	5000000
decena de millón	40000000
centena de millón	+ 100000000
	145673294

Lectura y escritura de números naturales

145 673 294

ciento cuarenta y cinco *millones*
seiscientos setenta y tres *mil*
doscientos noventa y cuatro

Para escribir números naturales de más de cuatro cifras se agrupan éstas de tres en tres, comenzando por la derecha y se separan los grupos mediante un espacio en blanco, no por puntos ni comas.

Para leer un número natural primero se separan también las cifras de tres en tres comenzando por la derecha, después se leen de izquierda a derecha como si fuesen números de tres cifras, añadiendo las palabras mil, millones, billones,... donde corresponda.

Ejemplos

187	*ciento ochenta y siete*
23 456	*veintitrés mil cuatrocientos cincuenta y seis*
234 567	*doscientos treinta y cuatro mil quinientos sesenta y siete*
56 185 501	*cincuenta y seis millones, ciento ochenta y cinco mil, quinientos uno*

Practica

Cada número con su lectura.

81 040	Ciento veintitrés mil cuatrocientos seis
123 406	Ochenta y un mil cuarenta
7260	Dos millones setecientas mil seiscientas cincuenta y dos
2 700 652	Siete mil doscientos sesenta
2 007 752	Dos millones siete mil setecientos cincuenta y dos

más...

Números ordinales

Los números ordinales se escriben y leen de forma distinta a los cardinales:

1º	Primero
2º	Segundo
3º	Tercero
...	...
10º	Décimo
11º	Undécimo
12º	Duodécimo
13º	Decimotercero
...	...
20º	Vigésimo
21º	Vigésimo primero
...	...
29º	Vigésimo noveno
30º	Trigésimo
40º	Cuadragésimo
50º	Quincuagésimo
60º	Sexagésimo
70º	Septuagésimo
80º	Octogésimo
90º	Nonagésimo
100º	Centésimo

1.2. Comparar y aproximar

Comparar números naturales

Dados dos números naturales distintos siempre podemos determinar si uno es mayor (o menor) que otro.

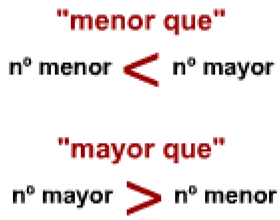
¿Cuál es mayor, 435 ó 1345?. Como sabes es mayor 1345, ya que se puede formar grupo de unidades de millar, mientras que en 435 solo se puede formar grupo de centenas. Se escribe:

$$1345 > 435 \qquad ó \qquad 435 < 1345$$

¿Qué pasa si los dos números que queremos comparar tienen el mismo número de cifras?. Por ejemplo, ¿cuál es mayor, 4673 ó 4736?. El mayor es 4736 pues aunque los dos tienen 4 unidades de millar, al comparar la siguiente cifra, la de las centenas tiene 7, mientras que 4673 tiene 6. Se escribe:

$$4736 > 4673 \qquad ó \qquad 4673 < 4736$$

- Si dos números naturales tienen distinto número de cifras, será mayor el que tenga más cifras.
- Si dos números tienen el mismo número de cifras se comparan éstas de izquierda a derecha. Es mayor el que tiene la primera cifra mayor, si son iguales se compara la siguiente y así sucesivamente.



Distancia en km desde Zaragoza a las capitales de provincia							
A Coruña	783	Ciudad Real	509	Lugo	691	Segovia	400
Albacete	398	Córdoba	696	Madrid	308	Sevilla	831
Alicante	503	Cuenca	271	Málaga	828	Soria	156
Almería	753	Girona	382	Murcia	546	Tarragona	228
Ávila	417	Granada	716	Ourense	746	Teruel	182
Badajoz	706	Guadalajara	254	Oviedo	578	Toledo	379
Barcelona	303	Huelva	922	Palencia	384	Valencia	320
Bilbao	303	Huesca	74	Pamplona	179	Valladolid	420
Burgos	297	Jaén	636	Pontevedra	855	Vitoria	227
Cáceres	606	León	478	S. Sebastián	259	Zamora	516
Cádiz	948	Lleida	148	Salamanca	532		
Castellón	262	Logroño	173	Santander	396		

Ordena

Ordena de menor a mayor la distancia en km de Zaragoza a las ciudades indicadas fijándote en el cuadro de encima.

1. Málaga
2. Sevilla
3. Huelva
4. Pontevedra
5. La Coruña
6. Cádiz

Aproximar

Para manejar ciertos datos, como distancias, número de habitantes de un país, etc., es frecuente realizar **aproximaciones** del número que expresa esos datos.

Estas aproximaciones se pueden hacer de dos maneras, mediante **truncamiento** o mediante **redondeo**.

- Para **truncar** un número natural en una de sus cifras, se sustituyen por ceros todas las cifras de orden inferior, esto es las situadas a la derecha de la deseada.
- Para **redondear** un número natural a una de sus cifras, se sustituyen por ceros las cifras de orden inferior, y la cifra redondeada:
  - Se deja como está si la inmediatamente siguiente es menor que 5.
  - Se aumenta en una unidad si la siguiente es mayor o igual que 5.

Ejemplos

- *Dado el número:* 145 693 294

Truncamiento en las centenas →	145 693 **2**00
Redondeo a las centenas →	145 693 **3**00
Truncamiento en las decenas de millar →	145 6**9**0 000
Redondeo a las decenas de millar →	145 6**9**0 000
Redondeo a las unidades de millón →	14**6** 000 000

más…

Por defecto y por exceso

Una aproximación de un número natural se llama por **defecto** si es menor que el número y por **exceso** en caso contrario, o sea si es mayor.

Los truncamientos siempre son aproximaciones por defecto, mientras que los redondeos pueden ser por defecto o por exceso.

Como has visto hay veces que al redondear y al truncar un número natural resulta el mismo número, pero en otras ocasiones no. Como regla general es preferible redondear que truncar, ya que el redondeo siempre es mejor aproximación al número que el truncamiento.

Por ejemplo, al aproximar el número 2347 a las decenas, si truncamos es 2340 y si redondeamos 2350, En el truncamiento hay una diferencia de 7 unidades con el valor real, mientras que esta diferencia sólo es de 3 unidades en caso de redondear.

Practica

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

	Verdadero	Falso
250 000 es el redondeo a decenas de millar de 248 325		
46 250 000 es el truncamiento en las decenas de millar de 46 248 325		
46 248 300 es el redondeo a las centenas de 46 248 325		
248 330 es el redondeo a decenas de 248 325		
247 000 es el redondeo a unidades de millar de 248 325		
46 248 000 es el truncamiento en las unidades de millar de 46 248 325		
200 000 es el redondeo a centenas de millar de 248 325		

2. Operaciones

Sumar, restar, multiplicar y dividir, es necesario que domines bien las cuatro operaciones básicas. No se trata de hacer operaciones muy largas que puedes realizar con la calculadora, cuando sea el caso, pero sí de que seas capaz de hacer las operaciones elementales con números pequeños con cierta rapidez.

2.1. Sumar y restar

La suma

- *Sumas cuando calculas los gastos del mes, alquiler, teléfono, luz, transportes, ...*
- *Suman en la caja del supermercado los precios de lo que has comprado.*
- *Sumas cuando calculas en un mapa los km que harás en un viaje.*
- *Sumas cuando cuentas los puntos en un partido de baloncesto.*

En estas y otras muchas ocasiones de la vida diaria es necesario sumar números, pero ¿en qué consiste sumar?:

- **Sumar** es agrupar varias cantidades en una sola.

Los números que se suman se llaman **sumandos** y el símbolo que empleamos para designarla es "**+**", se lee "*más*".

Recuerda en el ejemplo de la derecha cómo se suman números grandes.

.

¿Cómo se realiza la suma?

m c d u
4 3 9 7
6 2 5 3
\+ 5 8 9

Se colocan los números en columnas de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

1
4 3 9 7
6 2 5 3
\+ 5 8 9
9

Empezamos sumando las unidades 7+3+9=19 o sea 1 decena y 9 unidades. Se escribe el 9 debajo de las unidades y el 1 sobre las decenas.

En la práctica: 7+3+9 = 19, *escribo el 9 y me llevo 1*

2 1
4 3 9 7
6 2 5 3
\+ 5 8 9
3 9

Continuamos sumando las decenas 1+9+5+8=23 o sea 2 centenas y 3 decenas. Se escribe el 3 debajo de las decenas y el 2 sobre las centenas.

En la práctica: 1+9+5+8 = 23, *escribo el 3 y me llevo 2*

1 2 1
4 3 9 7
6 2 5 3
\+ 5 8 9
2 3 9

Ahora sumamos las centenas 2+3+2+5=12 o sea 1 unidad de millar y 2 centenas. Se escribe el 2 debajo de las centenas y el 1 sobre las unidades de millar.

En la práctica: 2+3+2+5 = 12. *Escribo el 2 y me llevo 1*

1 2 1
4 3 9 7
6 2 5 3
\+ 5 8 9
1 1 2 3 9

Por último sumamos las unidades de millar: 1+4+6=11 y como en este ejemplo no hay más cifras escribimos el 11 y ya hemos terminado.

En la práctica: 1+4+6 = 11. *Escribo el 11*

Propiedades de la suma

La suma de dos números naturales siempre da otro número natural, por lo que se dice que es una *operación interna*. Esta operación cumple determinadas propiedades que facilitan su utilización a la hora de calcular.

- ¿En qué orden hay que hacer la suma de números naturales?.

Como sabes al sumar *12 + 26* da el mismo resultado que la suma *26 + 12*, *38* en ambos casos. En una suma se puede cambiar el orden de los sumando sin que varíe el resultado. Esto se conoce con el nombre de *propiedad conmutativa*.

Propiedad conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma.

a + b = b + a

(a y b expresan dos números naturales cualesquiera)

Ejemplos:			
	12+6 = 6+12 = 18	8+15 = 15+8 = 23	11+14 = 14+11 = 25

- ¿Cómo se realiza una suma de tres o más sumandos?

Si por ejemplo queremos sumar *12 + 23 + 45* podemos hacerlo de dos maneras:

1º) Sumamos *12 + 23 = 35* y al resultado le sumamos 45, *35 + 45 = 80*

2º) Sumamos primero *23 + 45 = 68* y sumamos este resultado a 12, *12 + 68 = 80*

De las dos formas la suma resulta igual.

La primera forma se expresa así: *(12+23) + 45* donde el paréntesis indica la operación que hay que hacer en primer lugar, y la segunda *12 + (23+45)*, y has visto que:

$$\underbrace{\underbrace{(12+23)}_{35}+45}_{80} = \underbrace{12+\underbrace{(23+45)}_{68}}_{80}$$

A esta propiedad se le llama *propiedad asociativa*, ya que lo que hemos hecho ha sido "asociar" dos sumandos en uno.

Propiedad asociativa: Si se suman tres o más sumandos se puede sustituir la suma de dos cualquiera de ellos por el resultado de su suma.

(a + b) + c = a + (b + c)

Ejemplos:			
	(7+3)+5 = 10+5 = 15	7+(3+5) = 7+8 = 15	(7+3)+5 = 7+(3+5)
	(6+4)+9 = 10+9 = 19	6+(4+9) = 6+13 = 19	(6+4)+9 = 6+(4+9)

- ¿Qué ocurre si a un número se le suma 0?

Como sabes cualquier número sumado con 0 se queda igual, 17 + 0 = 17, el cero no añade nada. Por ese motivo al número 0 se le llama *elemento neutro* de la suma.

Elemento neutro: Al sumar 0 a cualquier número éste no se altera.

a + 0 = a

La resta

¿En qué situaciones de la vida diaria se utiliza la resta?.

Si por ejemplo tienes en el banco 948 euros y te cobran una factura de 325 euros, ¿cuánto te queda?.

Si a 1248 le quitas 325 quedan 623 euros. Esta operación es una resta.

948 - 325 = 623

Si estamos haciendo un viaje de 360 km y llevamos recorridos 150, ¿cuántos km faltan para llegar?.

También hay que restar:

360 - 150 = 210

Restamos si para pagar una cuenta de 34 euros damos un billete de 50. Nos han de devolver 16 euros.

50 - 34 = 16

¿Cómo se resta?

m c d u

$$\begin{array}{r} 8\;4\;5\;7 \\ -\,6\;2\;9\;3 \\ \hline \end{array}$$

Se colocan los números en columnas de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

$$\begin{array}{r} 8\;4\;5\;7 \\ -\,6\;2\;9\;3 \\ \hline 4 \end{array}$$

Empezamos restado las unidades 7 – 3 = 4
Se escribe el 4 debajo de las unidades.

En la práctica: *de 3 a 7 van 4, escribo el 4*

$$\begin{array}{r} 8\;3\;{}^{1}5\;7 \\ -\,6\;2\;9\;3 \\ \hline 6\;4 \end{array}$$

Continuamos con las decenas pero no se puede restar 9 de 5, cogemos una centena que son 10 decenas, y la añadimos a las decenas, ahora hay 15, menos 9 quedan 6.

En la práctica: *de 9 a 15 van 6 y me llevo 1*

$$\begin{array}{r} 8\;3\;5\;7 \\ -\,6\;2\;9\;3 \\ \hline 1\;6\;4 \end{array}$$

Ahora las centenas, me quedan 4 centenas y al quitar 3, queda 1.

En la práctica: *en lugar de quitar una centena al 4 se la añadimos al 2 y hacemos 2 más 1 que llevo, 3, de 3 a 4 va 1. Escribo el 1*

$$\begin{array}{r} 8\;\;4\;\;5\;\;7 \\ -\,6\;\;2^{+1}\;9\;\;3 \\ \hline 1\;\;6\;\;4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\;4\;5\;7 \\ -\,6\;2\;9\;3 \\ \hline 2\;1\;6\;4 \end{array}$$

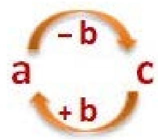
Por último las unidades de millar, 8 – 6 = 2

En la práctica: *de 6 a 8 van 2. Escribo el 2*

La **resta** es la operación **opuesta** a la **suma**; ¿qué número hay que sumar a 32 para obtener 50?.

32 + 18 = 50 o bien 50 – 32 =18

- Decimos que: ***a - b = c*** si ***b + c = a***



- En una resta cualquiera: ***a – b = c***
  a es el **minuendo, b** el **sustraendo** y **c** es la **diferencia**.
  El signo que se emplea es "**-**", se lee "*menos*".
  Observa que el sustraendo siempre debe ser menor que el minuendo.

a – b = c

minuendo sustraendo diferencia

más…

Observa

La resta no cumple las propiedades de la suma.

No es *conmutativa*, si en la resta 37 - 25 =12 se cambia el orden 25 - 37 ni siquiera se puede hacer (por ahora).

Tampoco cumple la propiedad *asociativa*, fíjate:

(40 - 17) - 15 = 23 - 15 = 8

40 - (17 - 15) = 40 - 2 = 38

Por tanto es necesario utilizar bien los paréntesis para saber en qué orden realizar las operaciones. Si hay paréntesis haremos en primer lugar la operación que encierran y si no hay, las efectuaremos de izquierda a derecha.

16 - 10 - 2 = 6 - 2 = 4

16 - (10 - 2) = 16 - 8 = 8

Completa

3521	26	520
134	21	522
90	182	3621

a) 2375 + 1246 = ______

b) (134 + 126) + 245 = ______ + (126 + 245)

c) 1245 + ______ = 723

d) 467 - ______ = 285

e) 48 + 67 = ______ + 25

f) (67 + 26) - ______ = 58 + 14

Elige la correcta

A) A una oposición se presentaron 2345 candidatos. En la primera prueba eliminaron a 1027 y en la segunda a 792. ¿Cuántos quedaron para la tercera?

- 426
- 326
- 427

B) Entre María y Juan cobran lo mismo que entre Marta y Pablo. Si María cobra 1820 euros, Juan 1385 y Pablo 1760, ¿cuánto gana Marta?

- 1345 euros
- 1436 euros
- 1445 euros

C) Luisa tiene en el banco una cuenta con 2134 euros. Este mes ha ingresado la nómina de 1586 euros y le han cargado los gastos con tarjeta que ascienden a 358 euros. También ha pagado la hipoteca de 650 euros y el recibo de la luz de 58 euros. Si además ha sacado en efectivo 500 euros un día y 200 otro, ¿cuánto le queda en el banco?.

- 2154 euros
- 1954 euros
- 1854 euros

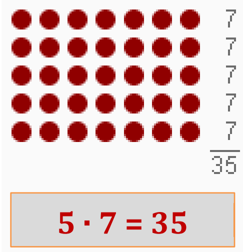
D) Juan compra una camisa de 44 euros y unos pantalones de 68 euros. En la camisa le rebajan 12 euros y en el pantalón 18. ¿Cuánto paga?.

- 82 euros
- 100 euros
- 94 euros

2.2. Multiplicar y dividir

Multiplicar

Imagina que vas a pagar 5 entradas para el cine y cada entrada cuesta 7 euros, para calcular el precio total puedes sumar 5 veces los 7 euros, 7+7+7+7+7=35 o bien multiplicar 5 x 7 = 35.



- Una **multiplicación** es una suma de sumandos iguales.

Los números que se multiplican se llaman **factores** y el resultado es el **producto**. Para indicar la multiplicación se emplea el símbolo "×", o bien un punto "·", situado entre los dos factores, se lee "*por*". Aquí emplearemos más a menudo el punto.

Multiplicar por la unidad seguida de ceros

¿Qué significa 4·100?, significa 4 veces 100, es decir 400. ¿Cuánto es 12·1000?, 12 veces 1000, esto es 12 000.

- Para multiplicar por la unidad seguida de ceros se le añaden al número tantos ceros como siguen a la unidad.

Ejemplos:			
	124 · 10 = 1240	37 · 100 = 3700	843 · 1000 = 843 000

Recuerda

Para multiplicar números grandes, se disponen los cálculos como se indica en el ejemplo de la derecha.

¿Cómo se multiplica?

```
   25783
  ×  346
  ------
  154698
 103132
77349
--------
 8920918
```

Primero se multiplica 25 783 · 6 = 154 698 unidades
Luego se multiplica 25 783 · 4 = 103 132 decenas y se coloca el resultado debajo de las decenas.
Después 25 783 · 3 = 77 349 centenas, el resultado irá debajo de las centenas.
Por último se suman los tres productos obtenidos.

Propiedades de la multiplicación

Como ocurría en la suma, el producto de dos números naturales siempre da otro número natural, es una *operación interna* y también cumple las mismas propiedades.

- ¿Es lo mismo 5·3 que 3·5? En efecto sí, en ambos casos el producto es 15.

Propiedad conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.
a · b = b · a

Ejemplos:			
	12 · 6 = 6 · 12 = 72	8 · 15 = 15 · 8 = 120	11 · 14 = 14 · 11 = 154

- Sabes que los paréntesis indican qué operación hay que efectuar primero, veamos cómo afectan a la multiplicación. Para multiplicar 5·8·4 se pueden agrupar los factores de dos maneras: *(5 · 8) · 4 = 40 · 4 = 160* *5 · (8 · 4) = 5 · 32 = 160*

  De las dos formas el producto resulta igual, la multiplicación también cumple la *propiedad asociativa*.

Propiedad asociativa: En una multiplicación se pueden sustituir dos o más factores por su producto. **(a · b) · c = a · (b · c)**

Ejemplos:			
	(7·3)·5 = 21·5 =105	7·(3·5) = 7·15 = 105	(7 · 3) · 5 = 7 · (3 · 5)
	(6·4)·9 = 24·9 =216	6·(4·9) = 6·36 = 216	(6 · 4) · 9 = 6 · (4 · 9)

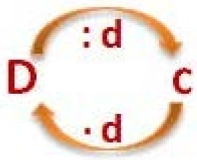
- **Elemento neutro**. Así como en la suma decíamos que el 0 era el elemento neutro porque al sumarlo a cualquier otro, éste no varía, en la multiplicación ocurre lo mismo con el 1.

> El **1** es el elemento neutro de la multiplicación porque multiplicado por cualquier número resulta ese mismo número. **a · 1 = a**

La división

Queremos envasar 45 litros de vino en garrafas de 5 litros, ¿cuántas garrafas necesitaremos?. Hay que encontrar un número que multiplicado por 5 de 45, como 9·5=45, harán falta 9 garrafas. Esta operación para repartir en partes iguales es la división. Se indica: 45 : 5 = 9

La división es la operación inversa a la multiplicación.



- **Dividir** un número **D** entre otro número **d**, significa buscar otro número **c**, de forma que **d · c = D**

D : d = c si **d · c = D**

D es el dividendo, **d** es el divisor y **c** es el cociente.

Pero, ¿qué hubiera ocurrido si en lugar de 45 hubiésemos querido envasar 49 litros?, en este caso no hay ningún número natural que multiplicado por 9 de 49. Con 9 garrafas nos quedarían 49 - 45 = 4 litros sin envasar.

Esta división no es exacta, tiene un **resto** que no es cero. La llamaremos **división entera**.

15 | 5 → cociente 3, resto 0	47 | 5 → cociente 9, resto 2
15 = 3·5	**47 = 9·5+2**
División exacta	**División entera**

- En una división entera se cumple que: **Dividendo = divisor · cociente + resto**

Recuerda ahora cómo se hace.

¿Cómo se divide?

4805 | 52
9

> Se divide 480 entre 52 obteniendo 9 decenas de cociente.

En la práctica: *El divisor tiene 2 cifras, tomamos las dos primeras del dividendo, pero como 48 no se puede dividir para 52, se toma una cifra más 480 : 52 que aproximadamente es 9.*

4805 | 52
12   9

> Se multiplica 9 · 52 = 468 y este resultado se resta de 480, 480 – 468 = 12. El resto son 12 decenas.

En la práctica: *Se hace esta operación directamente, 9·2 = 18, a 20 van 2 y llevamos 2, 9·5 =45 más las dos que llevamos 47, a 48 va 1.*

4805 | 52
125   92

> Se transforman las 12 decenas en 120 unidades que con las 5 que hay son 125. Se divide 125 entre 52, obteniendo 2 de cociente. 480 – 468 = 12. El resto son 12 decenas

En la práctica: *Se baja el 5 y repetimos el proceso anterior, 125:52 es 2 aproximadamente. Escribimos el 2 en el cociente*

4805 | 52
125   92
21

> Se multiplica 2 · 52 = 104 y este resultado se resta de 125, 125 – 104 = 21. El resto son 12 unidades.

En la práctica: *2·2 =4, de 4 a 5 va 1, 2·5=10 y a 12 van 2*

más...

Cociente por defecto y por exceso

En el problema de repartir 49 litros de vino en 5 garrafas nos podemos plantea dos preguntas.

1) ¿Cuántas garrafas se llenan?, la respuesta es 9 y quedan 4 litros sin envasar.

2) ¿Cuántas garrafas hacen falta?, si queremos envasar todo el vino hacen falta 10 garrafas y a una le faltaría un litro para estar llena.

En el primer caso el cociente se dice por **defecto**, en el segundo por **exceso**.

En una división por defecto:

c · d < D

y en una por exceso:

c · d > D

Aquí, si no se indica lo contrario nos referiremos al cociente por defecto.

Completa

95	729	26
16	17	9
40	85	12

a) (34 · 15) : 6 = _____

b) 456 : _____ = 38

c) (17 · 14) · 26 = _____ · (14 · 26)

d) 486 : (6 · 9) = _____

e) 486 : 6 · 9 = _____

f) 45 · 16 = _____ · 18

Elige la correcta

A) Un pintor que cobra a 42 euros la hora ha recibido 504 euros como pago de un trabajo. ¿Cuántas horas trabajó?

- 11 horas
- 12 horas
- 13 horas

B) ¿Cuántas vueltas da en un día una rueda que gira a razón de 45 revoluciones por minuto?

- 64 800
- 6480
- 162 000

C) Una granja de 3000 gallinas ponedoras tiene un rendimiento de 4 huevos diarios por cada 5 gallinas. ¿Cuántas docenas de huevos produce cada semana?

- 1400
- 1200
- 2800

D) Un barco pesquero ha obtenido 8100 euros por la captura de 1350 kg de merluza. ¿Cuánto obtendrá otro barco que ha pescado 1645 kg de merluza del mismo precio?

- 9670 euros
- 9780 euros
- 9870 euros

3. Potencias y raíces

Potencias

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de varios factores iguales.

El factor repetido se llama **base**, y el número de veces que se repite, **exponente**.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Se escribe: a^5 y se lee "*a elevado a 5*" o "*a elevado a la quinta*"

$$base^{exponente} \qquad 3^5$$

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Al utilizar las potencias ten en cuenta que:

- Cualquier número puede expresarse mediante una potencia de exponente 1. Por ejemplo: $5^1 = 5$, $7^1 = 7$, ...
- Para efectuar una potencia debes multiplicar la base por sí misma tantas veces como indique el exponente. No confundas $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ con $5 \cdot 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

Potencias de base 10

Ya sabes que para multiplicar por 10 basta añadir un 0. Teniendo en cuenta esto el cálculo de las potencias de 10 resulta muy sencillo y has de procurar hacerlo mentalmente.

$10^1 = 10$
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$
$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$
... y así sucesivamente.

Para elevar 10 a una potencia basta escribir 1 seguido de tantos ceros como indique el exponente.

$$10^{12} = 1\,\underbrace{000\,000\,000\,000}_{\text{12 ceros}}$$

Recuerda que al principio de la unidad viste cómo se puede descomponer un número según el valor de posición de sus cifras, y observa cómo escribirlo utilizando las potencias de 10.

$4 = 4$
$90 = 9 \cdot 10$
$200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 10^2$
$3000 = 3 \cdot 1000 = 3 \cdot 10^3$
$70000 = 7 \cdot 10000 = 7 \cdot 10^4$
$600000 = 6 \cdot 100000 = 6 \cdot 10^5$
$5000000 = 5 \cdot 1000000 = 5 \cdot 10^6$
$40000000 = 4 \cdot 10000000 = 4 \cdot 10^7$
$100000000 = 1 \cdot 100000000 = 1 \cdot 10^8$

Podemos escribir:

$$145\,673\,294 = 1 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4$$

Esta descomposición de un número en la que cada orden de unidades está representado por una potencia de 10, se llama **descomposición polinómica**.

Ejemplos

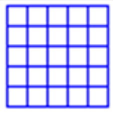
234 567 =	$2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$
8 123 045 =	$8 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10 + 5$
47 523 500 =	$4 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2$

más...

Cuadrados y cubos

► El **cuadrado** de un número es su potencia de exponente **2**.

$a^2 = a \cdot a$ "*a al cuadrado*"

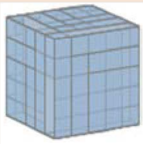


$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

(25 cuadraditos)

► El **cubo** de un número es su potencia de exponente **3**.

$a^3 = a \cdot a \cdot a$ "*a al cubo*"



$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

(125 cubitos)

más...

Fíjate bien

Estas propiedades que has visto para el producto y el cociente **no** se cumplen cuando se trata de la suma o la resta.

$(4 + 3)^2 = 7^2 = 49$

mientras que:

$4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

Lo mismo ocurre con la resta:

$(5 - 3)^3 = 2^3 = 8$

y sin embargo:

$5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$

Propiedades de las potencias

Potencia de un producto

Si aplicamos las propiedades de la multiplicación a la siguiente potencia resulta:

$(5 \cdot 4)^3 = (5{\cdot}4) \cdot (5{\cdot}4) \cdot (5{\cdot}4) = 5{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}4 = 5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}4 = (5{\cdot}5{\cdot}5) \cdot (4{\cdot}4{\cdot}4) = 5^3{\cdot}4^3$

La potencia de un producto es el producto de las potencias de cada uno de sus factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

La potencia de un producto podemos hacerla pues de dos maneras:

Se calcula el valor de la base y luego la potencia que resulta.	*Se calcula el valor de las potencias de los factores y se multiplica el resultado.*
$(5 \cdot 4)^3 = 20^3 = 8000$	$(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3 = 125 \cdot 64 = 8000$
$(3 \cdot 7)^2 = 21^2 = 441$	$(3 \cdot 7)^2 = 3^2 \cdot 7^2 = 9 \cdot 49 = 441$

Potencia de un cociente

De la misma manera, para hacer la potencia de un cociente se puede hacer también de dos maneras.

Se calcula el valor de la base y luego la potencia que resulta.	*Se calcula el valor de las potencias de dividendo y divisor, y se multiplica el resultado.*
$(12 : 4)^3 = 3^3 = 27$	$(12 : 4)^3 = 12^3 : 4^3 = 1728 : 64 = 27$
$(28 : 7)^2 = 4^2 = 16$	$(28 : 7)^2 = 28^2 \cdot 7^2 = 784 : 49 = 16$

La potencia de un cociente es el cociente de las potencias del dividendo y del divisor. $(a : b)^n = a^n : b^n$

Verdadero o falso

Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

	Verdadero	Falso
$(5 + 3)^3 = 5^3 + 3^3$	○	○
$(15 : 3)^3 = 15^3 : 3^3$	○	○
$(7 - 4)^2 = 7^2 - 4^2$	○	○
$6^2 \cdot 5^2 = (6 \cdot 5)^2$	○	○
$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$	○	○

Operaciones con potencias

Producto de potencias de la misma base

Fíjate en la siguiente multiplicación de potencias:

$$5^4 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$$

El **producto de dos potencias** de la misma base es otra potencia con igual base y exponente la **suma** de los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplos:

$7^5 \cdot 7^2 = 7^7$	$6^8 \cdot 6^4 = 6^{12}$	$2^7 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{15}$

Cociente de potencias de la misma base

Fíjate en la siguiente división de potencias:

$$7^5 : 7^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 25 : 25 = 5^3$$

El **cociente de dos potencias** de la misma base es otra potencia con igual base y exponente la **diferencia** de los exponentes. $a^m : a^n = a^{m-n}$

Ejemplos:

$7^5 : 7^2 = 7^3$	$6^8 : 6^4 = 6^4$	$2^7 : 2^3 = 2^4$

Potencia de una potencia

Observa ahora cómo se hace la potencia de una potencia:

$$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$$

La potencia de una potencia es otra potencia con igual base y exponente el **producto** de los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplos:

$(7^5)^2 = 7^{10}$	$(6^8)^4 = 6^{32}$	$(2^7)^3 = 2^{21}$

más...

Exponente cero

¿Se pueden calcular potencias de exponente 0?

Según la definición de potencia un número elevado a 0 equivaldría a multiplicarlo por sí mismo "ninguna vez", luego parece que no tiene mucho sentido.

Ahora bien si te fijas en la siguiente operación:

$$5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = \mathbf{5^0}$$

pero por otra parte:

$$5^4 : 5^4 = \mathbf{1}$$

con lo que concluiremos que

$$\mathbf{5^0 = 1}$$

► Una potencia de exponente 0 vale 1 $\quad \mathbf{a^0 = 1}$

Practica

1) *Expresa como una sola potencia:*

a) $2^5 \cdot 5^5$ **d)** $5^8 : 5^3$
b) $20^2 : 5^2$ **e)** $(5^3)^2$
c) $7^3 \cdot 7^2$ **f)** $3^4 \cdot (3^5)^2$

2) *Expresa como una sola potencia:*

a) $(7^5 \cdot 7^3) : 7^6$ **d)** $(5^5 : 5^3)^3 \cdot 5^2$
b) $(6^5 : 6^2) \cdot 6^3$ **e)** $(5^4)^2 : (5^2 \cdot 5^3)$
c) $(2^3 \cdot 2^2) : 2^5$ **f)** $(3^4)^2 \cdot (3^2)^4 : (3^3)^5$

Comprueba

1. a) 10^5
b) 4^2
c) 7^5
d) 5^5
e) 5^6
f) 3^{14}

2. a) 7^2
b) 6^6
c) $2^0 = 1$
d) 5^8
e) 5^3
f) 3

3.1. Raíces cuadradas

más...

Con la calculadora

Las calculadoras tienen teclas para calcular potencias y raíces cuadradas.

La que calcula potencias suele llevar el símbolo:

x^y ó **^**

habitualmente primero se introduce la base, después se pulsa la tecla indicada y luego el exponente.

Utilízala para calcular las potencias y raíces cuadradas de números grandes.

Los números como 1, 4, 9, 16, 25, ...que resultan de elevar al cuadrado los números naturales se llaman **cuadrados perfectos**.

$1 = 1^2$ $4 = 2^2$ $9 = 3^2$
$16 = 4^2$ $25 = 5^2$ $36 = 6^2$
... etc

¿El número 81 es un cuadrado perfecto?, o lo que es lo mismo, ¿hay algún número que al elevarlo al cuadrado sea 81?

$$9^2 = 81$$

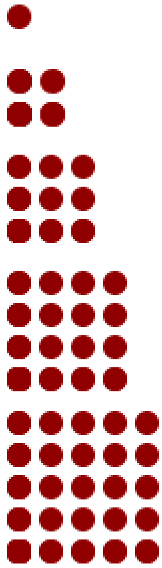
Se dice que 9 es la **raíz cuadrada** de 81.

$$\sqrt{81} = 9 \text{ ya que } 9^2 = 81$$

- La **raíz cuadrada** exacta de un número, **b**, es otro número **a**, que cumple:

$$a^2 = b \text{ y se indica } \sqrt{b} = a$$

b es el radicando y el símbolo es el radical



$1^2 = 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$

$2^2 = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

$3^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} = 3$

$4^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4$

$5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$

Raíces cuadradas enteras

La mayoría de los números naturales no son cuadrados perfectos, su raíz cuadrada no es exacta.

Tomemos por ejemplo 41, no hay ningún número natural que al elevarlo al cuadrado de 41, pero hay dos que se aproximan:

$$\left.\begin{array}{l} 6^2 = 36 < 41 \\ 7^2 = 49 > 41 \end{array}\right. \rightarrow 6 < \sqrt{41} < 7$$

La raíz cuadrada de 41 es un número comprendido entre 6 y 7

- Al número natural cuyo cuadrado más se aproxima, por debajo, al número, lo llamamos su **raíz entera**. Así la raíz entera de 41 es 6 y la diferencia 41 – 36 es el **resto**.

Ejemplo

- *¿Cuál es la raíz cuadrada entera de 130?*

$11^2 = 121 < 130$ $12^2 = 144 > 130$	$\rightarrow 11 < \sqrt{130} < 12$	*La raíz cuadrada entera de* 130 *es* 11 *y el resto es* 130 – 121 = 9

Más cuadrados perfectos

A continuación tienes los cuadrados de los veinte primeros números, si los memorizas te vendrá bien para aproximar algunas raíces cuadradas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
121	**144**	**169**	**196**	**225**	**256**	**289**	**324**	**361**	**400**

Relaciona

Relaciona cada número con su raíz cuadrada exacta

625	17
400	25
196	20
169	50
2500	14
289	13

Elige la correcta

La raíz cuadrada exacta de un número es 16, ¿de qué número se trata?

- 4
- 256
- 32

Para embaldosar una superficie cuadrada se emplearon 36 baldosas, también cuadradas de 1 metro de lado, ¿cuántas baldosas hay en cada lado?

- 6
- 18
- 9

La raíz cuadrada entera de un número es 17 y el resto 4. ¿De qué número se trata?

- 289
- 38
- 293

¿Cuál es la raíz cuadrada entera de 630?

- 24
- 25
- 26

4. Operaciones combinadas

La propiedad distributiva

Marta trabaja de canguro y cobra 8 euros la hora. El jueves estuvo 4 horas en una casa y el sábado trabajó 5 horas en otra, ¿cuánto ha ganado esta semana?.

Hay dos formas de resolver este problema:

1) Se calcula el número total de horas trabajadas: 4 + 5 = 9 horas *y si cada hora gana 8 euros habrá ganado* *9 · 8 = 72 euros.*	*2) Se calcula lo que ganó cada día:* *el jueves ganó 4 · 8 = 32 euros* *el sábado 5 · 8 = 40 euros* *entre los dos días ganó 32 + 40 = 72 euros*
Operación: (4 + 5) · 8 = 72	*Operación: 4 · 8 + 5 · 8 = 72*
En ambos casos resulta la misma cantidad, luego	*(4 + 5) · 8 = 4 · 8 + 5 · 8*

Esta propiedad se conoce con el nombre de **propiedad distributiva** y también se puede aplicar si en vez de una suma hay una resta.

El producto de un número por una suma, o una resta, es igual respectivamente a la suma, o la resta, de los productos de dicho número por cada uno de los términos de la suma o la resta.

a · (b + c) = a · b + a · c
a · (b - c) = a ·b - a ·c

Observa que como el producto es conmutativo, la propiedad se cumple tanto si el producto va primero como si va en segundo lugar.

Ejemplos

Realiza de dos formas	*1) Primero el paréntesis*	*2) Aplicando la distributiva*
• $4 \cdot (5 + 6) =$	$4 \cdot 11 = 44$	$4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 20 + 24 = 44$
• $(8 + 5) \cdot 7 =$	$13 \cdot 7 = 91$	$8 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 56 + 35 = 91$
• $5 \cdot (22 - 4) =$	$5 \cdot 18 = 90$	$5 \cdot 22 - 5 \cdot 4 = 110 - 20 = 90$

En ocasiones interesa aplicar la propiedad distributiva en sentido contrario:

a · b + a · c = a · (b + c)

En este caso hablamos de "**sacar factor común**".

Ejemplos

Saca factor común:

- $5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 5 \cdot (6 + 8)$
- $3 \cdot 10 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 = 3 \cdot (10 - 8 + 7)$
- $4 \cdot 16 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot 8 = 4 \cdot (16 - 8 - 7)$

Jerarquía de operaciones

Cuando en una expresión aparecen sumas o restas y multiplicaciones o divisiones, combinadas, el resultado varía dependiendo del orden en que se hagan estas operaciones. Si por ejemplo queremos hacer 4 + 5 · 3, y en primer lugar se efectúa la suma 4 + 5 = 9 y luego por 3, resulta 27. Pero si hacemos primero 5 · 3 = 15 y luego 4 + 15 , el resultado es 19.

Para evitar equívocos hay establecidas unas reglas de prioridad de las operaciones. Hay que tener en cuenta que:

- La misión de los paréntesis, (...), y corchetes, [...], es la de unir o "empaquetar" aquello a lo que afectan.
- Los signos de multiplicar o dividir unen, es decir, cuando dos números están unidos por el signo de multiplicar forman un bloque inseparable
- Para poder sumar o restar dos números deben estar sueltos, no podemos sumar dos números si uno de ellos está unido por el otro lado a otra expresión mediante un signo de multiplicar o dividir.

El orden en que se hacen las operaciones es:

1º) Los paréntesis y corchetes, de dentro hacia fuera, si hay.

2º) Las potencias y raíces.

3º) Las multiplicaciones y divisiones, en el orden en que aparecen.

4º) Las sumas y restas, en el orden en que aparecen.

$(3+5)\cdot 4 - 2\cdot(6-3) + 10:2 =$

Primero los paréntesis

$= 8\cdot 4 - 2\cdot 3 + 10:2 =$

Después las multiplicaciones y divisiones

$= 32 - 6 + 5 =$

Por último las sumas y restas

$= 31$

Las operaciones combinadas se resuelven en varios pasos, todo lo que no se resuelva en un paso se debe copiar otra vez tal como estaba, sin olvidarlo ni cambiarlo de posición.

Según estas reglas el resultado correcto para el ejemplo del principio es 19 y no 27.

Ejemplos

- $(3+5)\cdot 6 - 8:2 + 9 - 2\cdot 3 = 8\cdot 6 - 8:2 + 9 - 6 = 48 - 4 + 9 - 6 = 47$
- $3 + 5\cdot(6 - 8:2) + 9 - 2\cdot 3 = 3 + 5\cdot(6-4) + 9 - 2\cdot 3 = 3 + 5\cdot 2 + 9 - 2\cdot 3 =$
  $= 3 + 10 + 9 - 6 = 16$
- $(3 + 5\cdot 6) - (8:2 + 7 - 2)\cdot 3 = (3+30) - (4+9-2)\cdot 3 = 33 - 11\cdot 3 =$
  $= 33 - 33 = 0$

más...

Averigua...

Si tu calculadora respeta las reglas de prioridad de operaciones. En la actualidad la mayoría lo hacen pero algunas realizan las operaciones según el orden de introducción.

Para saber cómo es la tuya realiza la operación del ejemplo,

4 + 5 · 3

Si el resultado es 19 lo hace, si es 27 no. En este caso deberás utilizar las teclas de memoria y teclear:

4 **M+** 5 **x** 3 **M+** **RM**

Aprende a utilizar también, si tienes, las teclas de paréntesis, habrá una para abrir y otra para cerrar. Aunque debes practicar sin ella para progresar en la práctica del cálculo, comprobar tus resultados con la calculadora te ayudará a corregir errores.

Practica

3) *Calcula:*

a) $6 + 8\cdot 3$ **b)** $12:3 + 11$

c) $(10-4)\cdot 8$ **d)** $4 + 14:(6-4)$

4) *Calcula:*

b) $4 + 8\cdot 5 - 8$ **b)** $12 + 3\cdot 8 - 8:4$

d) $7\cdot 2 + 8\cdot(7-4) - 8$ **d)** $3 + 7\cdot(6-4) - 28:4$

e) $(3+8)\cdot 8 + 5\cdot(11-3)$ **f)** $5\cdot[4 + 6\cdot(15-10)]$

Comprueba

3. *a) 30*
b) 15
c) 48
d) 11

4. *a) 36*
b) 34
c) 30
d) 10
e) 128
f) 170

Completa

1·4	3 + 6 · 4	31
17 - 6	27	15
36	6·2	55
30 - 3	15·3	4+15

A) 4 + 5·3 - 8:(8-6) = ______ - 8:2 = ______

B) 6·5 - 3 + 7·(6-2) = ______ + 7·4 = ______

C) 17 - 2·3 + 4·5 = ______ + 20 = ______

D) (4 + 5):3 + 6·4 = 9: ______ = ______

Elige la correcta

Pedro tiene 28 años menos que su padre y dentro de 5 años cumplirá 23. ¿Dentro de cuantos años la edad del padre será el doble de la de Pedro?.

- 10 años
- 5 años
- 18 años

Una fábrica de electrodomésticos fabrica 200 frigoríficos diarios, con unos gastos por unidad de 210 euros. Si vende la producción de un mes (30 días) a un mayorista por un millón ochocientos mil euros, ¿qué ganancia obtiene?

- 460 000 euros
- 640 000 euros
- 540 000 euros

Un comerciante compra 150 cajas de 20 kg de naranjas por 2000 euros. Cuando selecciona la mercancía desecha 300 kg y el resto lo pone en bolsas de 5 kg que vende a 6 euros. ¿Qué ganancia obtiene?.

- 1240 euros
- 3240 euros
- 4000 euros

Ejercicios

1. *Escribe con cifras:*
    - *a)* *Dos millones doscientos cincuenta mil*
    - *b)* *Trescientas tres mil seiscientas ochenta y cinco*
    - *c)* *Noventa mil cuatrocientos veintiuno*
    - *d)* *Cuatro mil novecientos noventa millones*

2. *Escribe cómo se leen estas cantidades:*
    - e) 423 235 600
    - a) 17 525 812 000
    - b) 658 120
    - c) 8457

3. *Redondea al orden indicado en cada caso:*
    - *a)* 24 765 *a millares*
    - *b)* 3 458 *a centenas*
    - *c)* 12 345 678 *a millones*
    - *d)* 924 912 *a decenas de millar*

4. *Calcula con lápiz y papel:*
    - *a)* 254 + 37 + 125 =
    - *b)* 4567 – 1280 – 564 =
    - *c)* 125 – 35 + 256 =
    - *d)* 1987 + 321 – 875 =

5. *Realiza las siguientes operaciones:*
    - a) 254 – (37 + 125) =
    - *b)* 320 – (125 – 45) =
    - *c)* 4567 – (1280 + 564) =
    - *d)* 125 – (35 + 56 – 22) =
    - *e)* 1560 + 1234 – (690 + 147) =
    - *f)* 1987 – (875 + 321 – 268) =

6. *Completa estas multiplicaciones:*

a)
1□8
× □2
□9□
□4□
1□7□

b)
9□8
× □□
2 8 7 4
□□□□
6 9 9 3 4

c)
□□□□
× 5 3
3 9 7 5
□□□□
□□□□□

7. *Completa estas divisiones:*

a) 4□8 | 5□
3 6 | 8

b) 9□□ | □5
□8□ | 3□
□2

c) 8 2□□□ | 14
□□9 | □□□5
□□□
□7□
□5

8. *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $12 - (9 + 6 - 10) =$ *b)* $8 - 7 + 21 - (6 + 9 - 4) =$

c) $15 + (4 + 6 - 8) - 9 =$ *d)* $(25 - 12 - 8) + 17 - 3 =$

e) $6 - (9 - 3) + 3 - (12 - 9) =$ *f)* $8 - [9 - (1 + 6) + 4] + 6 =$

g) $1 + [3 + (8 - 5 - 1)] - 6 =$ *h)* $3 + (10 - 6) + [5 - (3 + 1)] =$

i) $9 + 2 \cdot (11 - 7) =$ *j)* $36 - 75 : (3 + 14 - 2) =$

k) $5 + 3 \cdot 4 + 2 =$ *l)* $6 - (19 - 7) : (6 - 4) =$

m) $3 \cdot 6 + 12 : 4 - 4 =$ *n)* $24 \cdot 5 : 2 : 15 =$

o) $1 + 2 - 3 + 18 : (4 + 6 - 8) =$ *p)* $(2 + 9 - 5) \cdot 4 + 5 =$

q) $28 : [1 + (3 + 10)] + 10 =$ *r)* $(32 - 20) : (9 - 7) + 5 =$

s) $5 + 6 \cdot (8 - 3 - 1) : 2 =$ *t)* $18 : 3 \cdot 2 - (10 + 7 - 6) =$

u) $3 \cdot 4 - 15 : [14 - (7 - 2) + 6] =$ *v)* $3 \cdot (12 - 5) - [6 + 2 \cdot (8 - 2)] =$

w) $4 \cdot (6 : 2 - 1) + 3 \cdot 5 - (7 + 8) =$ *x)* $14 - 2 \cdot [7 - (5 - 4) - 2 \cdot 3] =$

y) $3 \cdot (13 + 7) : 2 + (9 - 6 + 3) \cdot 3 =$ *z)* $8 + 12 \cdot [3 - (6 - 4) + 8 - 4] =$

9. *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $32 : 2 + 2^4 =$ *b)* $3 \cdot 5 - 3^2 =$ *c)* $2^5 + 2^4 - 2^3 =$

d) $5^3 - 5 \cdot 3^2 =$ *e)* $(3 + 5)^2 =$ *f)* $9^2 - 3^2 =$

g) $2 + 3 \cdot 2^5 =$ *h)* $3^2 + 5^2 =$ *i)* $(9 - 3)^2 =$

10. *Utiliza las propiedades de las potencias para simplificar y expresa el resultado en forma de potencia.*

a) $3^2 \cdot 3^5 : 3^6 =$ *c)* $2^5 \cdot (2^3)^2$ *e)* $(5^3)^2 : (5^5 \cdot 5)$

b) $5^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 =$ *d)* $6^4 : 2^4 =$ *f)* $6^5 \cdot 2^5 : 3^5 =$

11. *En una granja hay vacas, ovejas y gallinas. En total hemos contado 714 patas, 168 cuernos y 137 picos. ¿Cuántos animales hay en total en la granja?.*

12. *Un apicultor tiene 150 colmenas que producen dos cosechas al año, a razón de 8 kg de miel por colmena en cada cosecha. La miel se envasa en tarros de medio kilo y se comercializa en cajas de 6 tarros que se venden a 20 euros la caja. ¿Qué beneficio anual tiene?.*

13. *En una casa de 9 plantas hay 4 pisos por planta y en cada piso 5 ventanas. Se ha encargado a una empresa la limpieza de los cristales y ésta ha dado un presupuesto de 12 euros por ventana de las cuatro primeras plantas y 15 euros por cada ventana de las restantes plantas. ¿A cuánto asciende el presupuesto?.*

14. *De un depósito que contenía 4765 litros de agua salen 18 litros por minuto. Hay otro grifo que vierte en el depósito 20 litros por minuto. ¿Cuántos litros de agua habrá al cabo de un cuarto de hora?.*

15. *Una colección de fascículos consta de 75 números. Los dos primeros se venden juntos por 1 €, el 3º y el 4º cuestan 1 € cada uno, y el resto se vende por 2 € ejemplar. ¿Cuánto costará la colección?.*

Divisibilidad 2

Para seguir avanzando en el estudio de los números naturales en esta unidad vamos a conocer las relaciones de divisibilidad que se dan entre ellos. Esto nos permitirá relacionar y clasificar mejor este conjunto de números. Aprenderemos herramientas que después necesitaremos para operar con otros conjuntos de números y nos ayudarán a resolver problemas de situaciones en que se dan determinadas repeticiones o particiones.

En esta unidad podrás aprender a investigar y buscar regularidades dentro del conjunto de los números naturales, a mejorar tus capacidades de cálculo y a desarrollar algoritmos y técnicas para encontrar los números que cumplan relaciones y condiciones determinadas.

En algunos momentos experimentarás qué es más fácil realizar lo que te piden matemáticamente qué expresarlo con palabras, en este sentido, deberás realizar un esfuerzo especial de concentración hasta que comprendas estos conceptos sin una dificultad especial. Te resultará cómodo leer las explicaciones de los procesos al mismo tiempo que observas los ejemplos resueltos.

Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

- *Mejorar los cálculos con las operaciones de división y multiplicación entre números naturales.*
- *Reconocer relaciones de divisibilidad entre números naturales.*
- *Aplicar criterios de divisibilidad y calcular todos los divisores de un número natural.*
- *Clasificar los números naturales en primos o compuestos.*
- *Descomponer un número natural en sus factores primos.*
- *Encontrar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de varios números.*
- *Resolver problemas donde intervienen los múltiplos o divisores comunes.*

1. Relaciones de divisibilidad: múltiplos y divisores

más...

*** Recuerda...**

Un número **par** es el que se puede dividir por 2, en caso contrario se llama **impar**.

Vamos a estudiar las relaciones de divisibilidad que se dan entre los números naturales (durante el tema, siempre nos referiremos con la palabra números a los números naturales). Éstas nos van a permitir clasificar a los números entre pares o impares*, múltiplos y divisores, primos o compuestos.

Las relaciones de divisibilidad se establecen mediante la división exacta de dos números naturales, de forma que el menor cabe un número exacto de veces en el mayor.

Recuerda que la multiplicación es la operación contraria a la división:

30 : 6 = 5 implica que 30 : 5 = 6 y, 5 x 6 = 30.

DIVISIÓN ENTERA	DIVISIÓN EXACTA
Dividendo 2 7 |5 *Divisor*	*Dividendo* 3 0 |5 *Divisor*
2 5	0 6
Resto *Cociente*	*Resto* *Cociente*
Dividendo = Divisor × Cociente + Resto	*Dividendo = Divisor × Cociente*
27 = 5×5 + 2	*30 = 5×6*

1.1. Múltiplos

Consideraremos que un número a es **múltiplo** de otro b, si se cumple que:

a = k · b siempre que k sea un número natural

Por ejemplo, los **múltiplos de 11** serán, 11 x 0 = 0, 11 x 1 = 11, 11 x 2 = 22, 11 x 3 = 33,...

La "tabla de multiplicar" de un número contiene a todos sus múltiplos. Dicho de otra manera, un número es múltiplo de otro si lo contiene un número entero de veces; el 22 es múltiplo de 11 porque lo contiene 2 veces.

Para ver si un número es múltiplo de otro bastará realizar la división y ver si es exacta (resto 0).

Ejemplos

- *¿37 es múltiplo de 6?*

  3 7 |6
  1 6

  No, ya que el resto no es 0.

- *¿98 es múltiplo de 7?*

  9 8 |7
  2 8 14
  0

  Si, ya que el resto es 0.

Reflexiona

- Existen infinitos múltiplos de cada número.
- El cero sólo tiene un múltiplo, el mismo 0.
- Los múltiplos de un número son mayores o iguales que dicho número.
- El cero es múltiplo de cualquier número.
- Cada número es múltiplo de sí mismo.

Múltiplos de 15

0	15	30	45	60
75	90	105	120	135
150	165	180	195	210
225	240	255	270	285
300	315	330	345	360
375	390	405	420	435
450	465	480	495	510
525	540	555	570	585
600	615	630	645	660
675	690	705	720	735
750	765	780	795	...

Verdadero o falso

Indica de las siguientes afirmaciones las que son verdaderas o falsas

	Verdadero	Falso
227 es múltiplo de 5	○	○
111 es múltiplo de 3	○	○
El 7 no tiene nigún múltiplo	○	○
12 es múltiplo de 2 y 6	○	○
El 455 es múltiplo de 7 y 13	○	○
3027 es múltiplo de 3 y 7	○	○

Relaciona

Relaciona los números con sus múltiplos.

6		1000
64		4334
13		130
27		11112
11		255
21		777
200		512
15		999

1.2. Divisores

Consideraremos que un número a es **divisor** de otro b, si se cumple que:

a : b = k, siempre que k sea un número natural
(división exacta, resto 0).

Por ejemplo, los **divisores de 12** serán:

12 : 1 = 12, 12 : 2 = 6, 12 : 3 = 4, 12 : 4 = 3, 12 : 6 = 2 y 12 : 12 = 1.

Dicho de otra manera, un número es divisor de otro si está contenido un número entero de veces en él; el 11 es divisor de 22 porque está contenido 2 veces en él.

Para ver si un número es divisor de otro nos bastará realizar la división y ver que es exacta.

Ejemplos

- *¿6 es divisor de 37?*

  $$\begin{array}{r|l} 37 & 6 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

  No, ya que el resto no es 0.

- *¿7 es divisor de 98?*

  $$\begin{array}{r|l} 98 & 7 \\ \hline 28 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

  Si, ya que el resto es 0.

Divisores de 32	
1	32
2	16
4	8

Divisores de 45	
1	45
3	15
5	9

Divisores de 60	
1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10

Divisores de 17	
1	17

Divisores de 21	
1	21
3	7

Reflexiona

- Existen un número finito de divisores de cada número.
- El 0 tiene infinitos divisores ya que todos los números son divisores de 0.
- Los divisores de un número son menores o iguales que dicho número.
- El 1 sólo tiene un divisor, el mismo 1.
- El uno es divisor de cualquier número.
- El cero no es divisor de ningún número.*
- Cada número es divisor de sí mismo.

más...

Fíjate...

La palabra **divisor** la utilizamos con dos significados:

- en una división, divisor es el número por quien se divide el dividendo.
- el divisor de un número es otro que lo divide de manera exacta.

Cuando a : b = c

- a es divisible por b.
- b es divisor de a.
- a es múltiplo de b.

*** Recuerda...**

Al **dividir el 0** para cualquier número, siempre dará 0.

0/4= 0, "repartiríamos 0 a cada uno de los 4"

Dividir por 0 para cualquier número es más complicado...

Fíjate que sucede en una división si el dividendo cada vez es más pequeño.

10 : 2 = 5
10: 1 = 10
10: 0,1 = 100
10 : 0,01 = 1000
10 : 0,0 ... 01 = 100 ... 0
...
10 : 0 = infinito!!!

Así, al dividir un número cualquiera por el número más pequeño (el cero), da el más grande (infinito).

Elige las correctas

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 13?

- 1313
- 1013
- 1014
- 195
- 313
- 130

Elige las correctas

Elige de entre los siguientes números los que sean divisores del número 225.

- 18
- 9
- 45
- 25
- 5
- 7

1.3. Criterios de divisibilidad

más...

Más criterios...

Buscando regularidades se pueden encontrar otros criterios. Veamos uno para 7.

Criterio divisibilidad del 7.

Un número es divisible por 7, si eliminando la cifra de las unidades y restando el doble de la cifra eliminada este resultado es divisible por 7.

Ejemplos

¿343 divisible por 7?

34 – 2 · 3 = 28 : 7 = 4 SI

¿151 divisible por 7?

15 – 2 · 1 = 13 : 7 = 1,8... NO

Comprueba la siguiente curiosidad...

Todos los números de tres cifras con todas ellas repetidas son divisibles por 37 (además son divisibles por el triple de la cifra que se repite).

555 = 37 · 15

777 = 37 · 21

Para comprobar si la división resulta exacta al dividir por un número determinado, en vez de realizar la división y ver si el resto es cero, podemos fijarnos en el cumplimiento de determinados criterios. Se pueden **buscar regularidades para establecer criterios de divisibilidad** en cualquier número natural, pero sólo nos interesarán aquellos que su aplicación sea más sencilla que realizar la división.

Se pueden comprobar observando sus "**tablas de multiplicar**" que:

- Los **múltiplos de 2** terminan en 0, 2, 4, 6, u 8. Serán divisibles por 2 si son **pares**.
- Para los **múltiplos de 3**, se cumple que al sumar el valor de cada cifra que compone ese número su resultado es múltiplo de 3.
- Los **múltiplos de 5**, terminan en 0 o en 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...

  Así, 334 **NO** es múltiplo de 5; y, 135 **SI** es múltiplo de 5.
- Para los **múltiplos de 11**, se cumple que si sumamos las cifras que están en las posiciones pares y las restamos de las cifras que están en las posiciones impares, nos resulta 0 o múltiplo de 11.
- También es útil el **criterio de divisibilidad del 9**, es igual que el del 3, pero la suma de las cifras ahora debe ser múltiplo de 9. Ejemplo: 945 es múltiplo de 9 porque 9+4+5 = 18 que es múltiplo de 9.

OBSERVA LOS MÚLTIPLOS DE 3

1×3 = 3	3 es múltiplo de 3	SÍ MÚLTIPLOS
2×3 = 6	3 es múltiplo de 3	
3×3 = 3	3 es múltiplo de 3	
4×3 = 12	1+2=3 múltiplo de 3	
5×3 = 15	1+5=6 múltiplo de 3	
6×3 = 18	1+8=9 múltiplo de 3	
7×3 = 21	2+1=3 múltiplo de 3	
8×3 = 24	2+4=6 múltiplo de 3	
...×3 = ...		
117×3 = 351	3+5+1=9 múltiplo de 3	
214	2+1+4=7 no es múltiplo de 3	

OBSERVA:

2345 ¿es múltiplo de 11?

2 3 4 5

3+5=8

2+4=6

8 – 6 = 2
Ni 0, ni múltiplo de 11
NO

7370 ¿es múltiplo de 11?

7 3 7 0

3+0=3

7+7=14

14 – 3 = 11
No 0, si múltiplo de 11
SI

Estos criterios **se pueden componer** entre sí, por ejemplo si queremos saber si un número es múltiplo de 6 = 2 · 3, deberá ser múltiplo de 2 y de 3 a la vez (par y suma de sus cifras múltiplo de 3).

Elige las correctas

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 3?

1113	123	201	93	103	302

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 15? Recuerda 15 = 3 x 5, luego tendrán que ser por 3 y por 5 a la vez.

11115	320	333	555	1200	246

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 11?

2003	88	123321	111	2345	121

Completa

7	4	6
1	5	3
9		

Elige una cifra para cada hueco de forma que el número total que resulte cumpla la frase correspondiente.

El número 11 ______ es múltiplo de 3 y 6.

El número 1 ______ 5 es divisible de 11.

El número 4 ______ 7 es múltiplo de 9.

El número 2 ______ 2 es múltiplo de 3.

Completa

30	13	148877
5115	14	1000
210	675	

Elige el número que cumple cada frase.

El número ______ tiene más de 15 divisores.

El número ______ sólo tiene dos divisores.

El número ______ tiene ocho divisores y dos de ellos son el 3, y el 5.

El número ______ es múltipo de 11.

El número ______ es múltiplo al menos de 9 y 5.

Recuerda

Un número es:

- múltiplo de **2** si acaba en 0, 2, 4, 6 u 8.
- múltiplo de **3** si al sumar el valor de cada cifra el resultado es múltiplo de 3.
- múltiplo de **5** si acaba en 0 ó en 5.
- múltiplo de **11** si la suma de las cifras que están en la posición par menos la suma de las cifras de posición impar, es 0 o múltiplo de 11.

2. Números primos y compuestos

más...

Observa...

► **El 1** es el único número que tiene sólo un divisor, él mismo. Así, no es ni primo ni compuesto. Aunque algunos autores lo incluyen entre los primos parece más razonable no hacerlo.

► **El 0** tiene infinitos divisores, todos los números naturales. Así, es compuesto.

¿Quieres 150.000 Euros?

Consíguelos buscando un número primo "grande".

Infórmate en las **siguientes** direcciones:

ELECTRONIC FRONTIER FOUNDATION
https://www.eff.org/awards/coop

GIMPS
Great Internet Mersenne Prime Search
http://www.mersenne.org/

http://www.divulgauned.es/spip.php?article30#forum47

Una clasificación sencilla de los números naturales surge en función del número de divisores que tiene cada número natural. Llamaremos **número primo** al que sólo tiene dos divisores (él mismo y la unidad). Al número que tiene más de dos divisores se le denomina **número compuesto**.

- El número 2 sólo se puede dividir por 1 y por 2, luego es un número primo.
- El número 4 se puede dividir por 1, por 2 y por 4, luego será un número compuesto. Fíjate que ningún número par va ha ser primo (todos se pueden dividir, al menos, por 2, por ellos mismos y por la unidad) salvo el 2.

Mira el cuadro adjunto de los 100 primeros números naturales, fíjate que hay muchos más números compuestos que primos.

No existe ningún algoritmo para obtener los números primos de forma sistemática a pesar de lo sencillo que es reconocerlos: basta con que no exista un número natural que lo divida de forma exacta distinto de él mismo y la unidad.

TABLA 100 PRIMEROS NÚMEROS NATURALES
NÚMEROS PRIMOS EN ROJO

0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39
40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49
50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**
60	**61**	62	63	64	65	66	**67**	68	69
70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**
80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**
90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99

Para **saber si un número dado es primo**, será suficiente dividir el número por los primos anteriores a él hasta llegar a una división exacta (el número será compuesto) o hasta que el cociente de la división sea igual o menor que el divisor (en cuyo caso el número dado será primo).

Verdadero o falso

¿Los siguientes números son primos? Recuerda que deberías probar en orden por todos los primos anteriores a él hasta que el cociente sea menor o igual que el divisor... no vale mirarlo en internet, si usar criterios de divisibilidad.

	Verdadero	Falso
12345	○	○
901	○	○
127	○	○
3332	○	○
307	○	○
143	○	○
10071	○	○
61	○	○
7337	○	○
361	○	○

2.1. Descomposición en factores primos.

Todos los números compuestos se pueden poner como producto de números primos siendo su resultado único. Llamaremos **descomposición factorial** de un número natural a su expresión en forma de producto de factores primos.

La descomposición factorial es mejor realizarla de forma ordenada con el siguiente proceso reiterativo:

PROCESO	*Ejemplo:* factorizar 140	VISUALIZACIÓN	
Dividimos el número a factorizar por el primer número primo en que resulte su división exacta, el cociente resultante se pone bajo el número y el divisor al otro lado de la línea vertical.	*Empezamos probando por el primo más pequeño* 140:2 = 70 . *Vale el* 2. *Ponemos el número que nos queda por dividir 70, debajo de 140.*	**140:2=70**	140 | 2 70 |
Se intenta seguir dividiendo por ese número hasta que su división no sea exacta, entonces probaremos a dividir por el siguiente número primo; poniendo cada vez que obtengamos una división exacta el cociente bajo el número y el divisor al otro lado de la línea vertical.	*Se sigue intentando dividir por 2* 70:2=35, *vale 2 otra vez.*	**140:2=70** 70:**2**=35	140 | 2 70 | 2 35 |
	Se sigue intentando con 2, *35:2 no se puede.* *Lo intentamos por el siguiente primo, el 3,* *35:3 no se puede.* *Lo intentamos por el siguiente primo, el 5,* *35:5 = 7, vale el 5.*	35:2=17,5 *NO* 35:3=11,6 *NO* 35:**5**=7	
Se continúa este proceso hasta obtener como cociente el número **1**.	*Vemos que el último primo es 7. Ya hemos terminado, 7:7=1 obteniendo el 1 como cociente.*	**7** *es primo* 7:7=1	140 | 2 70 | 2 35 | 5 7 | 7 1 |
Ponemos el número dado como producto de potencias de factores primos.	*Expresamos el resultado haciendo uso de la notación que conocemos de las potencias.*	$140=2^2\cdot5^1\cdot7^1$	

más...

Recuerda...

Llamábamos **factor** a cada uno de los números que intervienen en una multiplicación.

Un producto de factores iguales se podía escribir en forma de **potencia**.

Una potencia se definía:

a^n= **a.a.a... (n veces) ...a**,

en donde **a** era la base y **n** el exponente.

Más ejemplos

- *Descomponer en factores primos 252*

252:**2**=126	252	**2**
126:**2**=63	126	**2**
63:**3**=21	63	**3**
21:**3**=7	21	**3**
7 es primo	7	**7**
	1	

252 = $2^2\cdot3^2\cdot7$

- *Descomponer en factores primos 252*

980:**2**=490	980	**2**
490:**2**=245	490	**2**
245:**5**=49	245	**5**
49:**7**=7	49	**7**
7 es primo	7	**7**
	1	

980 = $2^2\cdot5\cdot7^2$

Relaciona

Relaciona los factores primos que están incluidos en un número.

180	2, 3 y 5
945	3, 11 y 5
6435	11 y 2
4334	3, 5 y 7

Relaciona

Realiza primero un papel la descomposición factorial de cada número y comprueba los resultados relacionándolos en la tabla.

437	$2 . 3 . 5 . 7$
210	$2^2 . 5 . 7^2$
980	$3^2 . 5^2 . 11$
2120	$2^3 . 5 . 53$
2475	$2^2 . 5^2 . 11$
1100	$19 . 23$

2.2. Cálculo de todos los divisores de un número

Un sistema sencillo para calcular todos los divisores de un número dado, es ir haciendo de forma ordenada productos de parejas de números enteros que den como resultado el número dado. El proceso se termina cuando se repite una pareja de forma inversa con los mismos números. Fíjate como lo puedes hacer en los siguientes ejemplos.

- Todos los **divisores de 60**:

1	2	3	4	5	6	**10**
60	30	20	15	12	10	6

- Todos los **divisores de 50**:

1	2	**5**	**10**
50	25	10	5

- Un algoritmo para **calcular cuántos divisores tiene un número**.

Tras hacer la descomposición factorial, el número de divisores coincide con el producto de los exponentes de las potencias de cada factor primo aumentadas en una unidad cada una de ellas. Veámoslo en los ejemplos anteriores.

- **Número de divisores de 60.**

Primero hacemos su descomposición factorial: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Sumamos una unidad a cada exponente y los multiplicamos entre sí:

$$(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = \textbf{12 divisores}.$$

- **Número de divisores de 50.**

Primero hacemos su descomposición factorial: $50 = 2^1 . 5^2$

Sumamos una unidad a cada exponente y los multiplicamos entre sí:

$$(1+1) . (2+1) = 2 . 3 = \textbf{6 divisores}.$$

Ejemplos

- *Para encontrar todos los divisores de 220 y 196.*

1º Calculamos el número de divisores para comprobar que no nos dejamos ninguno.

220 $220 = 2^2 . 5^1 . 11^1 =$ $(2+1)(1+1)(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{12}$ *divisores*

196 $196 = 2^2 \cdot 7^2 =$ $(2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ *divisores*

2º Vamos poniendo los divisores ordenados por parejas. Observa que su producto es el número dado.

1	2	4	5	10	11	20
220	110	55	44	22	20	11

1	2	4	7	14
196	98	49	28	14

Completa

10	15	20
14	13	3
12	5	6
4	8	11
16	9	30
7		

Calcula todos los divisores de 80, hazlo de forma ordenada.

1, 2, _____, _____, _____,

80, 40, _____, _____, _____.

Completa

9	35	18
21	5	10
4	14	15
6	7	11
15	30	13
16	12	8
42	20	

Calcula todos los divisores de 210, hazlo de forma ordenada como en los ejercicios anteriores, cuida que no se ven muy claras las dos series creciente y decreciente...

1, 2, 3, _____, _____, ...

_____, _____, _____,

210, 105, 70, _____, _____,

_____, _____, _____.

3. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Hasta ahora hemos estado estudiando la divisibilidad teniendo en cuenta un solo número natural, en este apartado nos interesa aprender algunas condiciones de divisibilidad **comunes a varios números**.

Para no confundir los dos conceptos que vamos a estudiar a continuación es bueno fijarse bien en el significado de las palabras que los denominan y en los resultados que se obtienen.

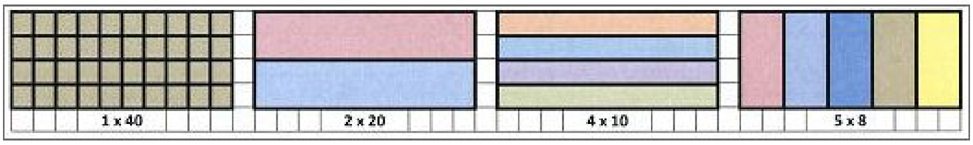
OBSERVA

Si son múltiplos comunes a varios números:

- Nos interesará **el menor** de todos ya que el mayor para todos los casos será infinito.
- El resultado deberá ser mayor o igual que los números de los que partimos.

Si son divisores comunes a varios números:

- Nos interesará **el mayor** de todos ya que el menor para todos los casos será 1.
- El resultado deberá ser menor o igual que los números de los que partimos.



3.1. Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de varios números será el resultado de seleccionar entre los múltiplos comunes a varios números **al menor** de ellos.

Vamos a realizar el cálculo del mínimo común múltiplo de los números 6, 4 y 8.

Múltiplos de 6 = 6, 12, **24**, 30, ..., **48**, ... , **72**, ...

Múltiplos de 4 = 4, 8, 12, 16, 20, **24**, 28, ... , **48**, ... , **72**, ...

Múltiplos de 8 = 8, 16, **24**, 32, ..., **48**, ... , **72**, ...

Una vez calculados sus múltiplos, nos basta con ver **el menor que se repite**, así, m.c.m.(6,4,8) = 24. Observa que todos los múltiplos de 24 son también múltiplos de los tres números dados (los múltiplos comunes de varios números, son múltiplos de su m.c.m.).

Este **método sencillo** para calcular el m.c.m. resulta muy tedioso si los números son grandes, así, una vez conocido bien el significado del m.c.m. vamos a estudiar un **algoritmo,** en el siguiente **ejemplo**, que nos resuelve cualquier cálculo del menor de los múltiplos comunes a de varios números de forma rápida.

Ejemplo

- *Para calcular el* ***m.c.m. (12, 18)****:*

1º Descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

2º Los expresamos como potencias. $12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad 18 = 2 \cdot 3^2$

3º Se multiplican entre sí ***todos*** *los números primos que aparecen y con su* ***mayor exponente****.*

$$\textbf{m.c.m. (12,18)} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Relaciona

Calcula mentalmente el mínimo común múltiplo de estos números y relacionalo con su resultado.

m.c.m.(3 y 21)	12
m.c.m. (20 y 30)	105
m.c.m. (18 y 10)	46
m.c.m. (4 y 12)	21
m.c.m. (23 y 46)	60
m.c.m. (3, 5 y 7)	90

Relaciona

Calcula el mínimo común múltiplo de estos números y relaciónalo con su resultado.

m.c.m. (8, 12 y 42)	105
m.c.m. (16 y 24)	48
m.c.m (45, 72 y 180)	180
m.c.m. (14, 22 y 77)	168
m.c.m. (60 y 90)	360
m.c.m. (21, 35 y 105)	154

3.2. Máximo común divisor

El **máximo común divisor (m.c.d.)** de varios números será el resultado de seleccionar entre sus divisores comunes **al mayor** de ellos.

Vamos a realizar el cálculo del máximo común divisor de los números 12, 30 y 18.

Divisores de **12** = **1**, 2, **3**, 4, **6** y 12.

Divisores de **30** = **1**, 2, **3**, 5, **6**, 10, 15 y 30.

Divisores de **18** = **1**, 2, **3**, **6**, 9 y 18.

Una vez puestos sus divisores, basta con ver el **mayor que se repite**, así, m.c.d.(12,30,18)=6.

Este **método sencillo** resulta muy tedioso si los números son grandes, así, una vez conocido bien el significado del m.c.d., vamos a estudiar un **algoritmo,** en el siguiente **ejemplo,** que nos resuelve cualquier cálculo del menor de los divisores comunes a varios números de forma rápida.

Ejemplos

- *Para calcular el* ***m.c.d. (12, 18)****:*

  1º Descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

  2º Los expresamos como potencias. $12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad 18 = 2 \cdot 3^2$

  3º Se multiplican entre sí ***sólo*** *los números primos que aparecen* ***repetidos*** *y con el* ***menor exponente****.*

  m.c.d. (12,18) = 2 · 3 = 6

- *Para calcular el* ***m.c.d. (30, 75)****:*

  1º Descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

  2º Los expresamos como potencias. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 75 = 3 \cdot 5^2$

  3º Se multiplican entre sí ***sólo*** *los números primos que aparecen* ***repetidos*** *y con el* ***menor exponente****.*

  m.c.m. (30,75) = 3 · 5 = 15

RECUERDA:

- El m.c.d. de varios números siempre es igual o menor que el menor de ellos.
- **Para no confundir el m.c.d. y el m.c.m. f**acilita pensar en que nos interesa el mayor de los divisores (ya que el menor sería el uno para todos ellos) y el menor de los múltiplos (ya que el mayor sería infinito para todos ellos).

más...

Para saber más...

Cuando el m.c.d. de varios números es 1, a esos números se les denomina **primos entre sí**.

COMPRUEBA:

Ponte varios ejemplos y ¡observa que se verifica!

- Si varios números son primos entre sí, su m.c.m. es igual a su producto.
- El producto de dos números es igual al producto de su m.c.m. por su m.c.d.

Relaciona

Calcula mentalmente el máximo común divisor de estos números y relaciónalo con el resultado.

m.c.d. (7 y 23)	10
m.c.d. (30 y 8)	6
m.c.d. (16 y 24)	1
m.c.d. (15 y 75)	15
m.c.d. (6 y 12)	2
m.c.d. (130 y 600)	8

Relaciona

Calcula el máximo común divisor de estos números y relaciónalo con el resultado.

m.c.d. (24 y 60)	12
m.c.d. (140, 180 y 420)	1
m.c.d. (221 y 323)	22
m.c.d. (90, 240 y 600)	30
m.c.d. (66 y 110)	17
m.c.d. (130 y 231)	20

3.3. Aplicación a la resolución de problemas

Se resuelven con el m.c.m. o el m.c.d. los problemas en los que, por ejemplo, se desee averiguar algún tipo de coincidencia, agrupamiento o reparto de varias cantidades de forma que no sobre nada. Pasamos a ver dos problemas resueltos:

Ejemplo 1

- *Tres amigos Pedro, Juan y María, coinciden un día en la piscina. Al terminar de bañarse acuerdan quedar para jugar al tenis la próxima vez que se vean.*
  Si Pedro nada 1 vez cada 4 semanas, Juan una vez cada 15 días y María cada tres días, ¿dentro de cuántos días tendrán que traer las raquetas de tenis?.

Tenemos que cada uno nada los días múltiplo de 28 (4 semanas), 15 y 3 días.

Como nos interesa el primer día que se encuentren, éste será el **menor múltiplo común (m.c.m.)** de 28, 15 y 3.

Resolviéndolo, tenemos que sus descomposiciones en factores primos son:

$28 = 2^2 \cdot 7 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 3 = 3 \quad \Rightarrow$ m.c.m. $(28, 15, 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$ **420 días**.

Así, deberán llevar las raquetas **dentro de 420 días**, momento en el que coincidirán la próxima vez en la piscina.

Ejemplo 2

- *Un carpintero tiene 20 listones de 1,50 metros, 15 listones de 0,60 metros y 12 listones de 2,40 metros. Desea construir marcos cuadrados para fotografías de forma que tengan el mayor tamaño posible de lado. ¿Cuál es el tamaño mayor del lado que podrá construir sin que le sobre ningún trozo? ¿Cuántos marcos podrá realizar?*

Observamos que se desean hacer divisiones exactas y con el mayor tamaño común para varias maderas. Se resolverá utilizando el máximo común divisor de las longitudes de los tres listones. Como las medidas del marco serán del orden de los cm, pasamos a esta unidad los listones para encontrar su mayor divisor común (m.c.d.) (a 150, 60 y 240 centímetros).

Resolviéndolo, tenemos que sus descomposiciones en factores primos son:

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 52 \qquad 60 = 22 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 240 = 24 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.d.}(150, 60, 240) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \text{ cm.}$$

Así, como los trozos son de 30 cm:

- del listón de 150cm : 30cm = 5 trozos por 20 listones = 100 trozos.
- del listón de 60 cm : 30 cm = 2 trozos por 15 listones = 30 trozos.
- del listón de 240 cm : 30 cm = 8 trozos por 12 listones = 96 trozos

El carpintero tendrá en total 226 trozos, que divididos para los 4 que se necesitan en cada marco, nos dan un total de 56 marcos y le sobrarán dos trozos de 30 cm.

Elige las correctas

En una tienda de comestibles tienen, 400 caramelos de fresa y 720 de limón. Quieren hacer paquetes del mayor número de caramelos posible y de forma que tengan la misma cantidad de caramelos sin mezclar los dos sabores. También desean que al final del envasado no sobre ni falte ningún caramelo. ¿Cuántos caramelos habrá en cada paquete? ¿Cuántos paquetes se obtendrán?

- Habrá 40 paquetes con 28 caramelos cada uno.
- Habrá 10 paquetes con 112 caramelos cada uno.
- Habrá 28 paquetes con 40 caramelos cada uno.
- Habrá 14 paquetes con 80 caramelos cada uno.
- Habrá 30 paquetes con 40 caramelos cada uno.
- Habrá 5 paquetes con 120 caramelos cada uno.

Elige las correctas

En una plaza hay una parada de autobús donde coinciden tres líneas distintas. La primera tarda 40 minutos en hacer el recorrido, la segunda 30 y la tercera 48 minutos. Si a las 10 de la mañana se encuentran los tres autobuses en la plaza, ¿cuándo se volverán a encontrar por primera vez?

- A las 12 de la mañana.
- A las 13 horas.
- A las 14 horas.
- A las 15 horas y 20 minutos.
- A las 13 horas y 30 minutos.
- A las 15 horas.

Ejercicios

1. *Indica de entre los siguientes números cuáles son múltiplos de 13.*

   35 195 127 104 1040 231 321

2. *Indica de los siguientes números cuáles son divisores de 360.*

   42 12 27 45 18 62 24

3. *De los siguientes números di los que son divisibles por 3.*

   327 110 431 695 522

4. *De los siguientes números di los que son divisibles por 5.*

   427 505 2370 1115 617

5. *De los siguientes números di los que son divisibles por 11.*

   111 924 3113 27172 142

6. *Rellena la tabla poniendo sí o no en cada casilla. Utiliza los criterios de divisibilidad.*

	1312	5050	11115	84722	169
Divisible por 2					
Divisible por 3					
Divisible por 5					
Divisible por 11					

7. *Escribe todos los números divisibles por 6 que hay entre 598 y 625.*

8. *De los siguientes números di cuáles son primos y cuáles compuestos. Razona la respuesta.*

   123 127 235 1302 947 283 43769

9. *Completa el hueco con un número para que se cumplan las siguientes condiciones.*

   a) 1□□ para que sea un número primo.

   b) 2□3 para que sea divisible de 3.

   c) 24□7 para que sea múltiplo de 11.

   d) 111□□ para que sea múltiplo de 3 y divisor de 5.

10. *Realiza la factorización de los siguientes números.*

    120 84 108 600 4620

11. *Halla todos los divisores de los siguientes números.*

    40 110 1000 191 360

12. *Busca un número que cumpla cada una de las siguientes frases.*

a) Sea primo y par.

b) El menor número compuesto divisible por 5 y 10.

c) Un número primo divisible por 11.

d) El primer número compuesto impar.

e) El menor número compuesto divisible por 3, 5 y 7.

13. *Tenemos 120 baldosas cuadradas coloreadas de 10 cm de lado. Queremos analizar las posibles combinaciones para ponerlas como un rectángulo que tenga de lado más de 3 baldosas y no sobrepase de 8. ¿Cuáles son?*

14. *Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes conjuntos de números.*

a) 48 y 36.

b) 150, 180 y 108.

c) 252, 90 y 600.

15. *Tres atracciones de un parque temático duran 40 segundos, 2 minutos y 30 segundos. Si tres amigos entran a la vez en cada una de estas atracciones, ¿cuántas veces tendrán que repetir en ellas si desean salir todos a la vez?*

16. *En dos colegios hay 600 y 210 alumnos. Se quieren hacer equipos lo más grandes posibles y del mismo número de alumnos para una competición entre los dos centros. ¿Cuántos equipos se harán en total?.*

17. *En Benasque hay tres nuevas avenidas de 1500 m, 240 metros y 720 metros. Se desean poner farolas a la misma distancia en todas las avenidas de forma que ésta sea la mayor posible. ¿A qué distancia estarán?. ¿Es razonable esta solución?. ¿Qué otras opciones tenemos?*

18. *Tenemos maderas de viejos palés rectangulares usados en la construcción que tienen 120 cm de largo por 80 cm de ancho. Deseamos hacer trozos de igual tamaño para ordenarlos en la leñera. Deseamos que sean lo más grandes posibles y que no se desperdicie ningún trozo. ¿De qué medida será cada leño?.*

19. *María tiene que llamar por teléfono a Brian. Brian es un graciosillo y le dijo al despedirse: "mi número de teléfono empieza por los divisores de 6 ordenados de forma decreciente, están seguidos del primer número primo y a continuación del menor número primo de cuatro cifras. ¿A qué número de teléfono le tiene que llamar María?.*

Los números decimales 3

Los números decimales aparecen continuamente en la vida cotidiana. Entenderlos y operar con ellos correctamente es imprescindible para tareas tan habituales como comprar en el mercado o medir una distancia. En esta unidad repasarás y ampliarás tus conocimientos acerca de los números decimales y el Sistema Métrico Decimal

Los contenidos están estructurados en tres partes. En la primera de ellas se establecen los conceptos y definiciones necesarias para describir y manejar los números decimales. En la segunda se recuerda la manera de realizar las operaciones aritméticas. Finalmente en la tercera se estudia el Sistema Métrico Decimal, como aplicación directa del uso de números decimales

Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

- *Distinguir y ordenar números decimales.*
- *Leer números decimales.*
- *Conocer y utilizar la equivalencia entre las posiciones decimales.*
- *Realizar operaciones con números decimales.*
- *Expresar cantidades de longitud, masa y capacidad en diferentes unidades del Sistema Métrico Decimal*
- *Resolver problemas operando con números decimales.*

1. Números decimales

más...

Otros números

El sistema de numeración decimal que hoy manejamos proviene de la India. Se comenzó a emplear en Europa a partir del siglo XI. Su uso simplificó mucho los cálculos, que hasta entonces eran realizados por expertos calculistas.

Además del sistema decimal se utilizan otros sistemas de numeración, como el romano, para numerar los siglos, o el binario, utilizado en informática, que utiliza sólo dos cifras: **0** y **1**.

Llamaremos **números decimales** a aquellos números cuyas cifras estén separadas por una coma. Las cifras a la izquierda de la coma corresponden a la parte entera del número, mientras que las cifras a la derecha de la coma son la parte decimal

256,859

Parte entera **Parte decimal**

Recuerda que cifra o dígito es cada uno de los caracteres que sirven para representar números. En el Sistema Decimal disponemos de diez cifras, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mediante las cuales representamos cualquier número. En el número 256,859 hemos utilizado las cifras 2, 5, 6, 8 y 9.

Los números decimales son necesarios para expresar cantidades cuyo valor es mayor que un número entero dado, pero menor que el número entero siguiente. Por eso aparecen en múltiples ocasiones en la vida diaria, como por ejemplo al manejar moneda fraccionaria o al efectuar cualquier medida.

2 euros y **25** céntimos

2 < 2,25 < 3

Una de las aplicaciones directas del sistema de numeración decimal la encontramos en nuestro sistema de medida, que se conoce como Sistema Métrico Decimal. Hasta su implantación en 1889, en la Primera Conferencia General de Pesos y Medidas, en cada región se manejaban distintas unidades de medida, lo que dificultaba enormemente el intercambio comercial y la comunicación científica.

Nombre y valor de las cifras decimales

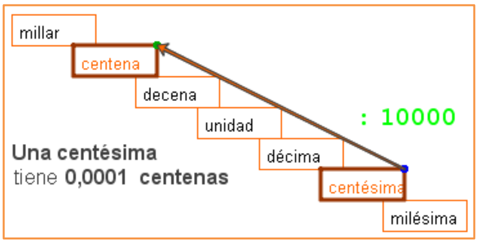
Al igual que en la parte entera, en la parte decimal el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa respecto a la unidad. Si tomamos el número 25,255942 vemos que está compuesto de:

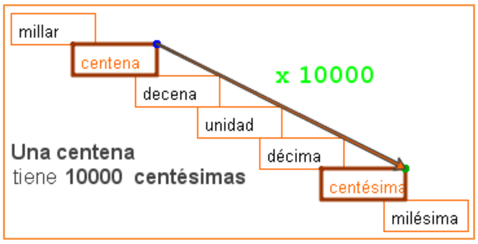
decena	unidad	,	décima	centésima	milésima	diezmilésima	cienmilésima	millonésima
2	5	,	2	5	5	9	4	2

En la parte entera conforme se avanza una posición desde la unidad hacia la izquierda, su valor se multiplica por 10, es decir 1 decena tiene 10 unidades, 1 centena tiene 100 unidades y así sucesivamente. En la parte decimal, conforme se avanza una posición a la derecha, su valor se divide entre 10

	décima	centésima	milésima	diezmilésima	cienmilésima	millonésima
unidades	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

En general, podemos comparar dos posiciones cualesquiera, no importa si pertenecen a la parte entera o decimal. Si pasamos de una posición a otra menor, tendremos que multiplicar por 10 tantas veces como sea preciso. A la inversa, para pasar de una posición a otra mayor tendremos que dividir sucesivamente entre 10.





Lectura de números decimales

A la hora de leer un número decimal, procederemos del siguiente modo:

1º Leemos la parte entera: **256 unidades**.

2º Leemos la parte decimal **859 milésimas** dándole el nombre de la posición de la última cifra decimal.

256,859
Parte entera   Parte decimal

Los ceros que aparecen al final de la parte decimal de un número pueden suprimirse, tanto a la hora de escribirlo como a la hora de nombrarlo:

3,4 = 3,40 = 3,400   porque   4 décimas = 40 centésimas = 400 milésimas

Ejemplos

El número	Se lee
87,958	*87 unidades 958 milésimas*
6,1056	*6 unidades 1056 diezmilésimas.*
0,05896	*0 unidades 5896 cienmilésimas*
0,0050	*5 milésimas*
58923,01	*58923 unidades 1 centésima*

Relaciona

Los siguientes números decimales con su parte decimal

589 cienmilésimas	0,12
2 décimas	1,2
589 milésimas	0,12589
12 centésimas	12,589
12589 cienmilésimas	0,0589
589 diezmilésimas	0,00589

Practica

1) ***a)*** *¿Cuántas centésimas son un millar?*

b) *¿Cuántas unidades son una milésima?*

c) *¿Cuántas centenas son una milésima?*

2) *Escribe los siguientes números:*

a) *5 unidades 5 milésimas*

b) *25 unidades 326 diezmilésimas*

c) *0 unidades 58084 cienmilésimas*

más...

¿Punto o coma?

¿Qué signo debemos utilizar para separar la parte entera de la parte decimal?.

La norma de la Real Academia de la Lengua establece que el separador decimal utilizado en nuestro país sea la coma, escrita en la parte inferior del renglón, no arriba.

3,14 y no 3'14

Aunque se permite el uso del punto anglosajón, como en las calculadoras, normal en países hispanoamericanos.

En la imagen, tomada de la wikipedia, puedes ver la utilización de uno u otro símbolo en el mundo. En verde la coma y en azul el punto.

Comprueba

1. *a) 100000*

b) 0,001

c) 0,00001

2. *a) 5,005*

b) 25,0326

c) 0,58084

1.1. Ordenar

Ordenar dos números significa decidir cuál de ellos es mayor y cuál menor. El procedimiento para comparar números decimales es el siguiente

- En primer lugar, nos fijamos es su parte entera. — *24,2 > 23,9 porque 24>23*
- Si tienen las partes enteras iguales, nos fijamos en la cifra siguiente, de las décimas. — *24,23 > 24,19 porque 2>1*
- Si tienen la cifra de las décimas iguales, nos fijamos en la cifra de las centésimas. — *24,271 > 24,238 porque 7>3*
- Si tienen la cifra de las centésimas iguales, nos fijamos en la cifra de las milésimas, y así sucesivamente. — *24,278 > 24,2779 porque 8>7*

1.2. Representar

Cualquier número decimal estará situado entre dos números enteros. El procedimiento para representar sobre la recta un número decimal es el siguiente:

1) Localizamos sobre la recta los dos números enteros entre los que se encuentra el número decimal que queremos representar
2) Dividimos el segmento determinado por estos números en **10** partes iguales para representar las décimas. Si el número decimal tiene centésimas, localizamos las décimas entre las que se encuentra
3) Dividimos, de nuevo, el segmento anterior en **10** partes iguales para representar las centésimas. Si nuestro número tiene milésimas, tendremos que repetir el proceso.

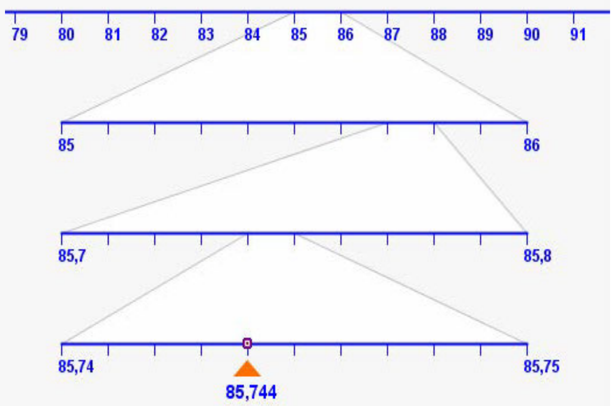
Ejemplo

- *Queremos localizar sobre la recta el número* 85,744

$85 < 85{,}744 < 86$

$85{,}7 < 85{,}744 < 85{,}5$

$85{,}74 < 85{,}744 < 85{,}75$



Comprueba

3. *a) 24,09<25,589*

b) 25,001<25,101

c) 8,099<8,186

d) 52,84<52,845

e) 5,8749<5,8752

f)5,54359<5,5436

Practica

3) *Ordena los siguientes pares de números de menor a mayor*

a) *25,589 y 24,09*

b) *25,001 y 25,101*

c) *8,186 y 8,099*

d) *52,84 y 52,845*

e) *5,8752 y 5,8749*

f) *5,5436 y 5,54359*

2. Operaciones

Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir con números decimales, de manera análoga a como lo hacemos con números naturales.

Redondeos

A veces, cuando operamos con números decimales, nos encontramos con un resultado con muchas cifras decimales. Es posible que no necesitemos tantas cifras decimales, o que incluso no tengan sentido.

Así por ejemplo no tiene sentido que un artículo cualquiera de una tienda tenga un precio de 25,569 euros, pues no existen monedas de valor inferior al céntimo de euro

En estos casos debemos realizar una **aproximación o redondeo**, que limite el número de cifras decimales. El procedimiento para redondear un número hasta una determinada cifra decimal es el siguiente:

- Si la primera cifra que debemos suprimir es menor que 5, dejamos igual la última que se conserva.

  Ejemplo: *redondeo hasta las centésimas de 25,562 → 25,56*

- Si la primera cifra que suprimimos es mayor o igual que 5, se aumenta en una unidad la última cifra que se conserva.

  Ejemplo: *redondeo hasta las centésimas de 25,569 → 25,57*

Ejemplos

El número	Se redondea como
87,958	87,96 *a las centésimas*
6,1056	6,11 *a las centésimas*
0,05896	0,1 *a las décimas*
0,0054	0,005 *a las milésimas*
58923,11	58923 *a las unidades*

Practica

4) Redondea

- *a) 25,589 a las centésimas*
- *b) 25,059 a las décimas*
- *c) 8,186 a las unidades*
- *d) 52,84 a las décimas*
- *e) 5,8752 a las centésimas*
- *f) 5,5436 a las décimas*

Comprueba

4. *a) 25,59*

b) 25,1

c) 8

d) 52,8

e) 5,88

f) 5,5

2.1. Sumar y restar

Las reglas para sumar números con decimales son las mismas que se utilizan para los números naturales.

Para **sumar**:	27,03 + 0,1 + 357,7534
▸ Se escriben los números con la misma cantidad de cifras decimales. Para ello se completan con ceros las partes decimales con menos cifras.	27,03 → 27,0300 0,1→ 0,1000 357,7534 → 357,7534
▸ Se suman como si no tuvieran comas	27,0300 0,1000 + <u>330,7534</u> 357,8834
▸ Se coloca la coma en el resultado, en el mismo lugar	27,03+0,1+357,7534 = 357,8834

Las reglas para restar números con decimales son las mismas que se utilizan para los números naturales. Recuerda que el **minuendo** debe ser **mayor** que el **sustraendo**.

Para **restar**:	357,8834 – 27,03
▸ Se escriben los números con la misma cantidad de cifras decimales. Para ello se completan con ceros las partes decimales con menos cifras.	27,03 → 27,0300 357,7534 → 357,7534
▸ Se restan como si no tuvieran comas.	357,7534 – <u>27,0300</u> 330,7234
▸ Se coloca la coma en el resultado, en el mismo lugar.	357,8834 – 27,03 = 330,7234

Más ejemplos

- 68,845 + 813,3 = 882,145

  68,845
  \+ <u>813,300</u>
  882,145

- 0,349 + 413,0087 = 413,0087

  0,3490
  \+ <u>413,0087</u>
  413,3577

- 880,4 – 59,566 = 820,834

  880,400
  \- <u>59,566</u>
  820,834

- 210,557 – 28,9 = 181,657

  210,557
  \- <u>28,900</u>
  181,657

Practica

5) *Realiza las siguientes operaciones*

a)	*5,859 + 56,8*	***e)***	*59,256 – 4,925*
b)	*0,005 + 9,5058*	***f)***	*5,986 – 0,356*
c)	*365,123 + 589*	***g)***	*8,4 – 6,897*
d)	*25,361 + 4,639*	***h)***	*125,569 – 124,169*

Comprueba

5. *a) 62,659*
b) 9,5108
c) 954,123
d) 30
e) 54,331
f) 5,63
g) 1,503
h) 1.4

2.2. Multiplicar

Para multiplicar dos números decimales seguimos el siguiente procedimiento:

1º Se efectúa la multiplicación como si se tratara de dos números naturales.

2º Se separan tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

Para **multiplicar**: $1{,}284 \times 16{,}2$

- Hacemos la multiplicación como si se tratara de dos números naturales.

  1,284 tiene tres cifras decimales
  16,2 tiene una cifra decimal

$$\begin{array}{r} 1284 \\ \times\ 162 \\ \hline 2568 \\ 7704\ \\ 1284\ \ \\ \hline 208008 \end{array}$$

- Separamos cuatro cifras decimales. $1{,}284 \times 16{,}2 = 20{,}8008$

Ejemplos

- $3{,}04 \times 8{,}7 = 26{,}448$

$$\begin{array}{r} 304 \\ \times\ 87 \\ \hline 2128 \\ 2432\ \\ \hline 26448 \end{array}$$

- $0{,}028 \times 0{,}003 = 0{,}000084$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \end{array}$$

Multiplicar por la unidad seguida de ceros

Cuando uno de los dos factores es un número compuesto por la unidad seguido de ceros, como por ejemplo 10, 100 ó 1000, no es necesario seguir el procedimiento habitual, es mucho más rápido y fácil.

- Se desplaza la coma hacia la derecha, tantos lugares como ceros siguen a la unidad.
  569,56 x 100 = 56956
  Desplazamos la coma dos lugares
- Si al desplazar la coma se agotan los decimales, añadimos ceros.
  5695,6 x 100 = 569560
  Desplazamos la coma un lugar y añadimos un cero

Procedimiento habitual

$$\begin{array}{r} 56956 \\ \times\ 100 \\ \hline 00000 \\ 00000\ \\ 56956\ \ \\ \hline 5695600 \end{array}$$

$569{,}56 \times 100 = 56956{,}00$

Ejemplos

- $87{,}95 \times 10 = 879{,}5$
- $87{,}95 \times 100 = 8795$
- $87{,}95 \times 1000 = 87950$
- $0{,}0012 \times 10 = 0{,}012$
- $0{,}0012 \times 100 = 0{,}12$
- $0{,}0012 \times 1000 = 1{,}2$

Practica

6) *Realiza las siguientes operaciones:*

a) *5,85 x 56,4* ***b)*** *0,005 x 9,505* ***c)*** *5,23 x 589*

d) *0,525 x 564* ***e)*** *1,25 x 66,4* ***f)*** *0,05 x 0, 123*

7) *Realiza las siguientes operaciones:*

a) *5,85 x 100* ***b)*** *0,005 x 10* ***c)*** *5,23 x 10000*

d) *25,4 x 100* ***e)*** *0,525 x 100* ***f)*** *1,25 x 10*

Comprueba

6. *a) 329,94*
b) 0,047525
c) 3080,47
d) 296,1
e) 83
f) 0,00615

7. *a) 585*
b) 0,05
c) 52300
d) 2540
e) 52,5
f) 12,5

2.3. Dividir

División con decimales

Los números decimales aparecen cuando intentamos realizar una división cuyo dividendo no es múltiplo del divisor, quedando un resto distinto de cero.

- Recuerda que: **Dividendo = Divisor × Cociente + Resto**

Si continuamos dividiendo el **resto**, una vez que ya es menor que el **divisor**, obtendremos un cociente con cifras decimales.

Observa en el ejemplo el procedimiento a seguir

1. Se efectúa la división entre los números enteros.

2. Se añade un cero al resto. Esto equivale a convertir el resto a décimas.

3. Se coloca la coma en el cociente para indicar que a continuación van las décimas y se efectúa la división. El resto así obtenido son décimas

4. Si el resto es de nuevo distinto de cero, podemos continuar el proceso convirtiendo el resto en centésimas

11 = 8·1 + 3	11 = 8·1,3 + 0,6
11 |8 3 1	11 |8 30 1, 3 6
11 = 8·1,37 +	**11 = 8·1,375**
11 |8 30 1, 37 60 4	11 |8 30 1, 375 60 40 0

División de dos números decimales

Para efectuar una división en la que intervienen números decimales, transformaremos el dividendo y el divisor en números naturales y seguiremos el procedimiento que se muestra en el ejemplo.

Para **dividir**:	25,236 : 6,5
1º Se iguala el número de cifras decimales del dividendo y del divisor, añadiendo ceros	25,236 : 6,5 = 25,236 : 6,500
2º Se quitan las comas	25,236 : 6,5 = 25236 : 6500
3º Se efectúa la división, extrayendo los decimales que convenga si no es exacta.	25236 |6500 57360 3,897 63600 51000 5500 → **resto**

Ejemplos

- 0,56 : 4,2 = 0,56 : 4,20 = 560 : 420

```
560     |420
1400     0,1333
 1400
  1400
   140
```

0,56 : 4,2 = 0,1333

- 635,8 : 2 = 635,8 : 2,0 = 6358 : 20

```
6358    |20
 35      317,9
 158
  180
   00
```

635,8 : 2 = 317,9

División por la unidad seguida de ceros

Al igual que pasaba en la multiplicación, en la división cuando el divisor es un número compuesto por la unidad seguida de ceros, como por ejemplo 100 ó 1000, no es necesario seguir el procedimiento habitual.

- Se desplaza la coma hacia la izquierda, tantos lugares como ceros acompañan a la unidad.
- Si al desplazar la coma se agotan los decimales, añadimos ceros a la **izquierda**.

Ejemplos

5,6 : 10 = 0,56	*Desplazamos la coma un lugar.*
5,6 : 100 = 0,056	*Desplazamos la coma dos lugares y añadimos un cero.*
5,6 : 1000 = 0,0056	*Desplazamos la coma dos lugares y añadimos dos ceros.*
43,25 : 1000 = 0,04325	*Desplazamos la coma tres lugares y añadimos un cero.*
43256 : 10000 = 4,3256	*Ponemos la coma separando las cuatro últimas cifras*

más...

Dividir entre 0,1

Dividir o multiplicar por números como 0,1 0,01 0,001 etc. es muy sencillo si recuerdas que:

- **Dividir** entre **0,1**, entre **0,01** y entre **0,001** equivale a **multiplicar** por **10**, por **100** y por **1000**, respectivamente.

  5,326 : 0,01 = 5,326 · 100 =
  = 532,6

- **Multiplicar** por **0,1**, por **0,01** y por **0,001** equivale a **dividir** entre **10**, **100** ó **1000** respectivamente.

  53,26 · 0,01 = 53,26 : 100 =
  = 0,5326

Practica

8) *Realiza las siguientes operaciones*

a) *40,95 : 5,85* ***e)*** *0,001196 : 0,0052*
b) *0,275 : 0,005* ***f)*** *35,776 : 16*
c) *75,835 : 5,23* ***g)*** *0,00276 : 23*
d) *40,386 : 25,4* ***h)*** *0,000168 : 0,012*

9) *Realiza las siguientes operaciones*

a) *5,85 : 100* ***e)*** *5255489 : 100000*
b) *0,005: 10* ***f)*** *1,25 : 0,1*
c) *5,23 : 10000* ***g)*** *0,05 : 0,0001*
d) *25,4 : 100* ***h)*** *0,012 x 0,001*

Comprueba

8. *a) 7*
b) 55
c) 14,5
d) 1,59
e) 0,23
f) 2,236
g) 0,00012
h) 0,014

9. *a) 0,0585*
b) 0,0005
c) 0,000523
d) 0,254
e) 52,55489
f) 12,5
g) 500
h) 0,000012

3. Sistema métrico decimal

Las magnitudes y su medida

- **Magnitud** es toda propiedad de un cuerpo que puede medirse.

En esta unidad nos centraremos en las magnitudes de **longitud**, **masa** y **capacidad**, aunque por supuesto existen muchas más.

Una medida es el resultado de comparar la cantidad de una magnitud que presenta un cuerpo con una cantidad fija considerada como unidad. **Toda medida consta de un número y una unidad de medida**.

Por ejemplo:

- Pedro mide 1,60 metros
- Pedro mide 8 palmos

más...

Antiguas unidades de medida

En España se adoptó el metro en 1849 y el Sistema Métrico Decimal es de uso obligatorio desde 1880.

En 1852 la Comisión de Pesos y Medidas publicó las equivalencias entre las antiguas unidades de cada región, y las del Sistema Métrico Decimal. Puedes consultarlas en la web:

http://www.cem.es

Almud *o celemín, medida de capacidad para áridos, que en Aragón equivale a 1,88 litros.*

A lo largo de la historia, y en cada región, se han utilizado diferentes unidades de medida. A finales del siglo XVIII, por iniciativa de la Academia de las Ciencias Francesa, se propuso el **Sistema Métrico Decimal**, que se caracterizaba por:

1º Definir las unidades básicas en función de propiedades de la naturaleza.

2º Definir múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas basados en la notación decimal, de forma que cada unidad es 10 veces mayor que la inmediata inferior.

3º Nombrar los múltiplos y submúltiplos utilizando prefijos a los que se añade el nombre de la unidad básica correspondiente a cada magnitud.

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	**Metro**	**m**
Masa	**Kilogramo**	**kg**
Capacidad	**Litro**	**l**

El Sistema Métrico Decimal fue ampliado hasta reunir todas las magnitudes consideradas fundamentales, en el conocido como **Sistema Internacional**. Hoy día tan solo tres países mantienen su propio sistema de unidades, entre ellos EEUU.

Múltiplos y submúltiplos

Una magnitud puede medirse con unidades diferentes. Da lo mismo decir que ha transcurrido un minuto o sesenta segundos. La elección de una u otra unidad depende de las circunstancias, de lo que se esté midiendo, de la precisión del instrumento de medida. También es conveniente evitar cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por ello es necesario contar con diferentes unidades para medir una magnitud.

En el Sistema Métrico Decimal, cada unidad es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior. El nombre de los múltiplos y submúltiplos se forma mediante prefijos a los que se añade el nombre de la unidad principal.

	Prefijo	Longitud	Capacidad	Masa
Múltiplos	kilo (1000)	kilómetro (km)	kilolitro (kl)	kilogramo (kg)
	hecto (100)	hectómetro (hm)	hectolitro (hl)	hectogramo (hg)
	deca (10)	decámetro (dam)	decalitro (dal)	decagramo (dag)
		metro (m)	**litro (l)**	**gramo (g)**
Submúltiplos	deci (0,1)	decímetro (dm)	decilitro (dl)	decigramo (dg)
	centi (0,01)	centímetro (cm)	centilitro (cl)	centigramo (cg)
	mili (0,001)	milímetro (mm)	mililitro (ml)	miligramo (mg)

Completa

cm	La distancia entre dos ciudades
mg	La altura de un recién nacido
cl	El agua que contiene una piscina
km	La sopa que cabe en una cucharada
kl	La cantidad de medicamento en una pastilla

más...

Muy grande o muy pequeño

En astronomía las distancias son tan grandes que resulta inadecuado medirlas en kilómetros. Por ello se utilizan las siguientes unidades.

- El **año luz**, que es la distancia que recorre la luz en un año, equivale a 9 460 000 000 000 km.
- La **unidad astronómica**, es la distancia media entre el Sol y la Tierra, equivalente a 1 500 000 000 km.

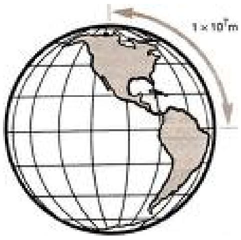
Para medir distancias microscópicas se utilizan submúltiplos menores del Sistema Métrico Decimal.

- **Micrómetro o micra**, que equivale a 0,000 001 m
- **Nanómetro**, que equivale a 0,000 000 001 m

Unidades de longitud

La **longitud** es la magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos.

La unidad fundamental de longitud en el Sistema Métrico Decimal es el **metro**, cuya abreviatura es "**m**".



En 1791 la Academia de Ciencias Francesa definió el metro como *la diezmillonésima parte de la distancia que separa el Polo de la línea del ecuador terrestre*.

Inicialmente esta distancia se representó mediante una barra de platino que se guardaba en diferentes países y que servía como patrón. Posteriormente se han dado otras definiciones de metro patrón más exactas, basadas en la velocidad de la luz en el vacío.

Múltiplos y submúltiplos

Para expresar las medidas de longitud utilizamos los múltiplos y submúltiplos, correspondientes al Sistema Métrico Decimal.

	×10		×10		×10		:10		:10		:10	
1 km		1 hm		1 dam		1 m		1 dm		1 cm		1 mm

Completa

1000000	diezmilésima	cienmillonésima
10000000	diezmillonésima	100000000

Un metro es aproximadamente la ________ parte de la distancia que separa el Polo de la linea del Ecuador de la Tierra.

Eso quiere decir que desde el Polo al Ecuador hay una distancia de, aproximadamente, ________ metros

Unidades de capacidad

más...

Masa y peso

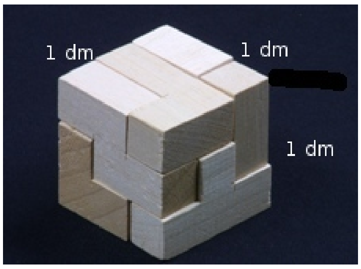
Habitualmente se confunden las magnitudes de masa y peso.

Esto sucede porque para medir la masa de un cuerpo utilizamos normalmente una balanza, es decir, medimos su peso.

Sin embargo, un mismo cuerpo, pesado en diferentes lugares de la Tierra, experimenta pequeñas variaciones de peso debidas a que la fuerza de la gravedad no es exactamente la misma en toda la superficie terrestre.

La **capacidad** es la magnitud física que expresa la propiedad de un cuerpo de contener otros cuerpos. La unidad de capacidad en el Sistema Métrico Decimal es el **litro**, cuya abreviatura es "**l**".

Para medir la capacidad necesitamos recipientes graduados, como la probeta que muestra la imagen adjunta. Conviene no confundir la capacidad con el volumen, a pesar de que pueden medirse con las mismas unidades. Un cartón de un litro de leche posee un volumen ligeramente superior, debido al grosor del cartón. La leche contenida ocupa un volumen de un litro, pero su capacidad es cero



En 1791 la Academia de Ciencias Francesa definió el metro como la diezmillonésima parte de la distancia que separa el Polo de la línea del ecuador terrestre.

Inicialmente esta distancia se representó mediante una barra de platino que se guardaba en diferentes países y que servía como patrón. Posteriormente se han dado otras definiciones de metro patrón más exactas, basadas en la velocidad de la luz en el vacío

Múltiplos y submúltiplos del litro

Cuando queremos expresar la capacidad de un objeto podemos utilizar los múltiplos y submúltiplos, correspondientes al Sistema Métrico Decimal.

	×10	×10	×10	:10	:10	:10
1 kl	**1 hl**	**1 dal**	**1 l**	**1 dl**	**1 cl**	**1 ml**

Unidades de masa

La **masa** es la magnitud física que expresa la cantidad de materia que tiene un cuerpo.

La unidad de masa en el Sistema Métrico Decimal es el **kilogramo**, cuya abreviatura es "**kg**", a pesar de que el resto de unidades del sistema métrico son submúltiplos de este.

El kilogramo se define como la masa de un cilindro de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres (Francia), conocido como kilogramo patrón.

Dicha masa corresponde aproximadamente a la de un litro de agua pura a 4ºC, que fue la definición original.

Múltiplos y submúltiplos

Los múltiplos y submúltiplos para la masa se definen a partir del gramo, y no del kilogramo, aunque este último es la unidad básica del Sistema Métrico Decimal.

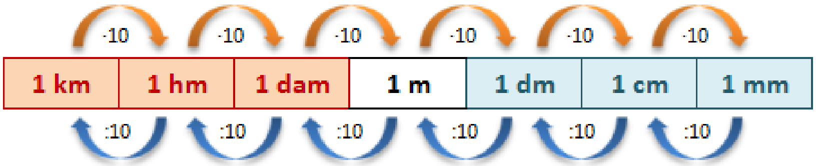
	×10	×10	×10	:10	:10	:10
1 km	**1 hm**	**1 dam**	**1 m**	**1 dm**	**1 cm**	**1 mm**

Cuando se necesita medir una una masa que es mucho mayor que el kilogramo, normalmente se utilizan los siguientes múltiplos: el **quintal métrico (qm)** y sobre todo la **tonelada métrica (tm)**.

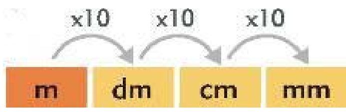
1 qm = 100 kg	**1 tm = 1000 kg**

3.1. Cambio de unidades

Para cambiar de unidades una medida en el Sistema Métrico Decimal debemos recordar que cada unidad es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.



- Para pasar de una unidad a otra de orden **inferior** se **multiplica por diez** tantas veces como sea necesario.
- Si pasamos **de** una unidad a otra de orden **superior** se **divide entre diez** tantas veces como sea necesario.



1 m = 1x10x10x10 mm = 1000 mm

1 mm = 1:10:10:10 = 0,001 m

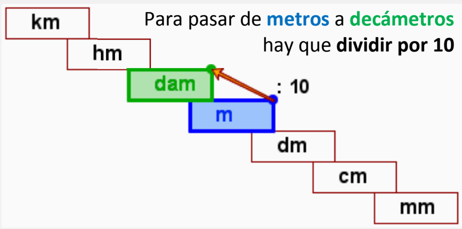
Una vez que disponemos de la equivalencia entre las unidades, tenemos que multiplicarla por la cantidad inicial:

3 m = 3 x 1000 mm = 3000 mm

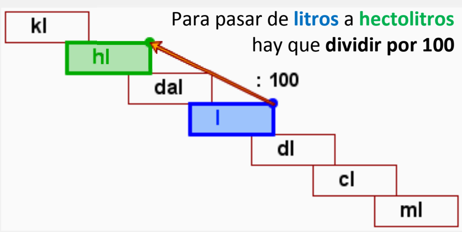
3 mm = 3 x 0,001 m = 0,003 m

Ejemplos

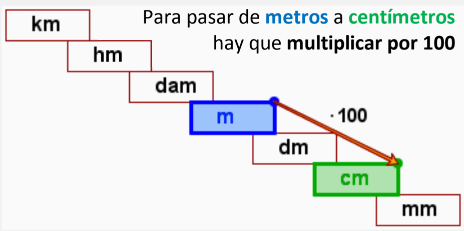
- 21,25 m son 21,25 : 10 = 2,125 dam



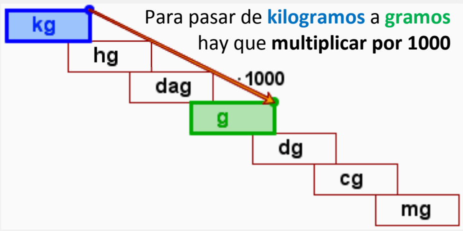
- 121,5 l son 121,5 : 100 = 1,215 hl



- 1,67 m son 1,67 × 100 = 167 cm



- 0,75 kg son 0,75 × 1000 = 750 g



Practica

10) *Realiza los siguientes cambios de unidades*

a) *12,5 kg a g*	***e)*** *12,5 l a kl*	***i)*** *0,0005 m a dm*
b) *12,5 kg a mg*	***f)*** *12,5 ml a kl*	***j)*** *0,0005 dm a m*
c) *8506 mm a m*	***g)*** *452,89 g a kg*	***k)*** *96,25 kg a dg*
d) *8506 mm a km*	***h)*** *0,00025 km a m*	***l)*** *455,4 kl a dal*

Comprueba

10. *a) 12500 g*

b) 12500000 mg

c) 8,506 m

d) 0,008506 km

e) 0,0125 kl

f) 0,0000125 kl

g) 0,45289 kg

h) 0,25 m

i) 0,005 dm

j) 0,00005 m

k) 962500 dg

l) 45540 dal

Lectura de medidas

Al igual que podemos nombrar el número decimal 23,56 como 2 decenas, 3 unidades, 5 décimas, 6 centésimas, podemos expresar una medida nombrando por separado las cantidades correspondientes a cada unidad. Para ello procederemos de la siguiente forma:

1º Asignamos a la cifra de las unidades, la unidad en que viene expresada la medida.

2º A las cifras situadas a la izquierda de la unidad, le hacemos corresponder sucesivamente los múltiplos de la unidad en que viene expresada la medida. De forma análoga, a las cifras decimales les corresponden sucesivamente los submúltiplos.

Ejemplos

- 892,47 m = 8 hm 9 dam 2 m 4 dm 7 cm
- 506,2 g = 5 kg 0 dag 6 g 2 dg = 5 kg 6 g 2 dg
- 4,234 kl = 4 kl 2 hl 3 dal 4 l

Y a la inversa, podemos partir de una medida expresada en más de una unidad, y expresarla mediante un único número decimal en una sola unidad.

1º Transformamos las cantidades a una misma unidad.

2º Sumamos todas las cantidades obtenidas.

Ejemplos

- *Expresa en gramos:* 8 dag 6 g 5cg = 80 g + 6 g + 0,05 g = 86,05 g
- *Expresa en dm:* 8 dam 6 m 5 cm = 800 dm + 60 dm + 0,5 dm = 860,5 dm
- *Expresa en litros:* 4 hl 7 dal 9 dl = 400 l + 70 l + 0,9 l = 470,9 l

Comprueba

11. a) 1kg 2hg 5dag
b) 8g 9dg 4cg 5mg
c) 8m 5dm 0cm 6mm
d) 8hm 5dam 6dm
e) 5kg 9hg 7dag 5g
f) 5ml
g) 5 l
h) 1dam 2m 5dm
12. a) 5430 l
b) 85,9 m
c) 8,954 g
d) 543000 cl
e) 0,08954 hg
f) 50,08 l
g) 90,86 hm
h) 70,95 dg

Practica

11) *Expresa las siguientes medidas con todas las unidades*

a) *12,5 hg*	***e)*** *597,5 dag*
b) *894,5 cg*	***f)*** *0,005 l*
c) *8506 mm*	***g)*** *0,005 kl*
d) *8506 dm*	***h)*** *0,125 hm*

12) *Expresa en la unidad que se indica*

a) *5kl 4hl 3dal en l*	***e)*** *8g 9dg 5cg 4mg en hg*
b) *8dam 5m 9dm en m*	***f)*** *5 dal 8cl en l*
c) *8g 9dg 5cg 4mg en g*	***g)*** *9km 8dam 6m en hm*
d) *5kl 4hl 3dal en cl*	***h)*** *7g 9cg 5mg en dg*

4. Problemas

A la hora de resolver problemas utilizando números decimales hay que tener en cuenta dos premisas fundamentales:

1º Para sumar o restar cantidades, deben estar expresadas en las mismas unidades.

2º A la hora de dar el resultado, además de la cantidad, deben incluirse las unidades de la magnitud correspondiente

Ejemplos

- *Disponemos de 3295,15 m de hilo de algodón para confeccionar 90 camisas. Si para cada camisa son necesarios 2453 cm. ¿Cuántos m de hilo sobrarán? ¿Cuántas camisas pueden confeccionarse con el hilo sobrante?*

  Solución:
  - *Pasamos el hilo necesario para una camisa a m:* 2453 : 1000 = 24,53 m
  - *Calculamos el hilo necesario para 90 camisas:* 90 · 24,53 = 2207,7 m
  - *Calculamos el hilo sobrante:* 3295,15 - 2207,7 = 1087,45 m
  - *Calculamos las camisas que se pueden hacer con lo que sobra:* 1087,45 : 24,53 = 44,33

  Respuesta:
  Sobrarán 1087,45 m de hilo, con el que podremos hacer 44 camisas y aún quedarán 8,13 m

- *Para llenar un depósito de 60 kl abrimos tres grifos. El primero arroja 3,8 litros por segundo, el segundo 10,93 dal por minuto y el tercero 8,75 hl por hora. ¿Cuántos segundos tarda en llenarse?.*

  Solución:
  - *Pasamos los caudales a litros por segundo: 1º)* 3,8 *l/seg*
    2º) $(10{,}93 \cdot 10): 60 = 1{,}822\ l/s$
    3º) $(8{,}75 \cdot 100): 3600 = 0{,}243\ l/s$
  - *Caudal total en l/s* $\rightarrow 3{,}8 + 1{,}822 + 0{,}243 = 5{,}865\ l/s$
  - *Tiempo que tarda en llenarse el depósito* $\rightarrow\ 60000 : 5{,}865 = 10230{,}2\ s$

Practica

13) *Una bodega dispone de 273,917 kl de vino. Si lo mezcla con 132,118 dal de agua. ¿Cuántas botellas de 0,75 l podrá llenar?*

14) *Juan ha comprado 2 sacos de harina de 34 kg y 8 sacos de 39,7 kg. ¿Cuántas bolsas de kilo y medio podrá llenar?. ¿Cuántos gramos de harina le sobran después de llenar las bolsas?.*

15) *Martín compra en la verdulería 5,5 kg de tomates y 9300 g de fresas. Paga en total 137,95 euros. Si las fresas van a 8,95 euros/kg, ¿cuál es el precio de los tomates?*

16) *Un edificio formado por planta baja y 7 pisos tiene una altura de 29,52m. Calcula la altura de cada piso si la planta baja mide 3,56 m de altura*

17) *Un alumno para acudir a la escuela, realiza cuatro veces al día un trayecto de 2,1 km. ¿Cuántos km recorre cada día? ¿Cuántos días tardará en recorrer 134,4 km?*

18) *Un paquete de 500 folios tiene un grosor de 6,3 cm y pesa 876 g. ¿Cuál es el grosor y el peso de un folio?. ¿Qué grosor y qué peso tiene un paquete de 300 folios?*

19) *¿Cuántos metros recorre un coche en un minuto si en una hora recorre 100 km 8 hm 9 dam?*

Comprueba

13. *366984 botellas*

14. *257 bolsas, 100 g de harina*

15. *9,5 euros/kg*

16. *3,71 m*

17. *8,4 km y 16 días*

18. *0,126 mm; 1752mg 3,78 cm; 525,6 g*

19. *1681,5 m*

Ejercicios

1. *Escribe en forma de número decimal:*
   a) Setecientas unidades veinticinco milésimas: 700,025
   b) Cuarenta y tres unidades, catorce centésimas: 43,14
   c) Cuatrocientas treinta y dos diezmilésimas: 0,0432
   d) Seis mil setecientas una milésima:

2. *Ordena de menor a mayor: 2,079655 2,079645 2 3,001 2,07965*

3. *Suma veintitrés unidades novecientas treinta y cinco diezmilésimas con quince unidades setecientas veintinueve cienmilésimas*

4. *Resta cero unidades tres mil novecientas millonésimas a cero unidades seiscientas una milésimas.*

5. *Multiplica 5,29 por 150,505 y redondea a las diezmilésimas*

6. *¿Por qué número hay que multiplicar 0,00056 para obtener 560? ¿Por qué número hay que dividir 560 para obtener 0,0056?*

7. *Calcula:*
   a) 8,35 + 12,46 – 2,98 =
   b) 7 + 3,12 – 6,123 + 2,05 =
   c) 123,208 – 12,8 + 0,1 =
   d) 0,098 – 0,007 + 3,088 =

8. *Calcula:*
   a) 23,35 + 12,46 · 3,5 =
   b) 7 · (6,12 – 4,123) + 2,05 =
   c) (4,16 + 2,231) · 10 – 5,098 =
   d) 8,36 – 1,25 · (2,57 – 0,97) =

9. *Efectúa las siguientes trasformaciones*
   a) 12,3 dag = ………………… mg
   b) 198500 mm= ………………… km
   c) 0,56 dl = ………………… dal
   d) 5,2 tm = ………………… hg
   e) 0,56 dam = ………………… dm
   f) 1255 l = ………………… cl

10. *Calcula y expresa cada resultado en metros, gramos o litros según el ejercicio:*
    a) 27,47 dam + 136,9 dm =
    b) 0,83 hm + 9,7 dam + 2500 cm =
    c) 2,753 dag + 13,45 dg =
    d) 1,835 hl + 9,8 dal + 2510 cg =
    e) 0,093 km + 4,07 hm + 25,3 dam =
    f) 0,000876 km – 0,23 m =
    g) 0,0131 kg + 8,072 hg + 45,35 dag =
    h) 0,000416 kl – 0,23 l =0,416 – 0,23

11. *Juan bebe al día 520 ml de leche, 1,5 l de agua y 15 cl de café. Pedro bebe al día 450 ml de zumo, 1,2 l de agua y 200 ml de vino. Expresa en l la diferencia entre la cantidad de líquido que ingiere Juan y la que ingiere Pedro.*

12. *Una central lechera compra el litro de leche a 0,39 €. Lo envasa en botellas de 1,5 l, que vende a 0,96 €. ¿Cuánto gana en cada litro? ¿Cuánto gana en cada botella?.*

13. *Un automóvil consume 7,5l cada 100 km. La gasolina cuesta 1,4 € el litro. ¿A cómo sale cada km recorrido?¿Cuánto costará la gasolina para un viaje de 1200km?.*

14. *Un carpintero divide un listón de madera de 272 cm en cinco partes iguales. Calcula lo que mide cada parte si en cada uno de los cortes que da se pierden 2,5 mm.*

15. *El perímetro de un rectángulo es 27,75 cm. La longitud de uno de los lados es 3 veces menor que la del perímetro. Calcula la longitud de cada lado.*

16. *El consumo medio de gasolina de un coche es de 7,1 litros por cada 100 km, y al iniciar un viaje, el depósito contiene 47 litros. ¿Cuántos litros de gasolina quedarán en el depósito después de recorrer 160 km? ¿Cuántos m podrá recorrer con la gasolina que le queda?.*

17. *Una caja que contiene 30 bombones igual pesa 1,453 kg y el peso de la caja vacía es 142,3 g. ¿Cuánto pesa cada bombón?¿Cuánto pesa la caja después de sacar 10 bombones?.*

Fracciones 4

Hasta ahora has trabajado con números naturales y decimales, en esta unidad estudiarás las fracciones. Hay muchas ocasiones en la vida diaria en las que se utilizan los números fraccionarios, así cuando decimos: "Medio litro de agua", "Tres cuartos de kilo de carne", "Un cuarto de hora",...

Una fracción es el resultado de dividir la unidad en partes iguales y tomar varias de esas partes. Pero las fracciones tienen además otras interpretaciones, verás que una fracción también es una forma de expresar un cociente y que puede ser utilizada como un operador en buen número de problemas.

Es importante que manejes con soltura las operaciones con fracciones. Para sumar o restar fracciones y para simplificar los resultados, utilizarás el m.c.m y el m.c.d. que estudiaste en la segunda unidad.

Al finalizar la unidad deberás ser capaz de:

- *Reconocer fracciones equivalentes.*
- *Simplificar fracciones y saber si una fracción es irreducible.*
- *Reducir a común denominador.*
- *Sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones.*
- *Efectuar operaciones combinadas sencillas con fracciones.*
- *Utilizar las fracciones para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.*

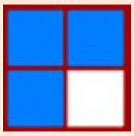
1. ¿Qué es una fracción?

más…

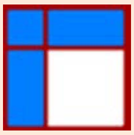
Ten cuidado

Una fracción se refiere siempre a partes **iguales** de la unidad.

En el siguiente cuadrado la parte azul representa tres cuartos.



En este otro cuadrado la parte azul no representa tres cuartos porque las partes no son iguales.

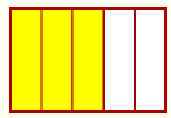


Una **fracción**, $\frac{a}{b}$, es un número que expresa una parte de la unidad.

- **b** es el **denominador** de la fracción. Indica el número de partes iguales en que se divide la unidad. Tiene que ser distinto de 0.
- **a** es el **numerador** de la fracción. Indica el número de partes que se toman.

$\frac{3}{5}$ → Numerador / Denominador

Dividimos la unidad en cinco partes iguales y tomamos tres.

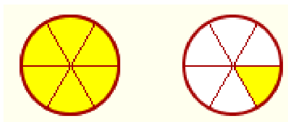


Ejemplos

- Si dividimos una tarta en dos partes iguales: $\frac{1}{2}$ significa que de las dos partes hemos tomado una.
- Si dividimos una hora en cuatro partes iguales: $\frac{3}{4}$ significa que de las cuatro partes hemos tomado tres.

$\frac{7}{6}$ → Numerador / Denominador

Dividimos cada unidad en seis partes iguales y tomados siete.



Cómo se lee

Para nombrar una fracción se lee primero el numerador y luego el denominador de la siguiente forma:

- Si el denominador es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o diez se dice medio, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno o décimo respectivamente.
- Si el denominador es 100, 1000, 10000... se añade la terminación *-ésimo* ó *-ésima*.
- En el resto de los casos se añade la terminación -avo.

Ejemplos

$\frac{1}{2}$ *Un medio*	$\frac{2}{3}$ *Dos tercios*	$\frac{5}{9}$ *Cinco novenos*
$\frac{1}{100}$ *Una centésima*	$\frac{5}{1000}$ *Cinco milésimas*	$\frac{12}{10000}$ *Doce diezmilésimas*
$\frac{1}{20}$ *Un veinteavo*	$\frac{2}{11}$ *Dos onceavos*	$\frac{7}{30}$ *Siete treintavos*

1.1. La fracción como operador

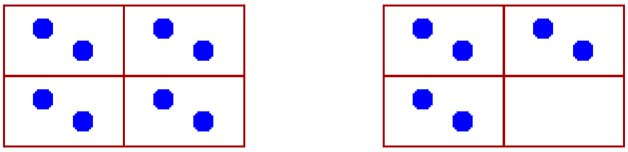
Para calcular la fracción de una cantidad, se divide la cantidad entre el denominador y se multiplica por el numerador.

$$\frac{a}{b} \text{ de } C = (C : b) \cdot a$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } 8$$

Se divide 8 en 4 partes iguales

Consideramos 3 de esas partes



$$\frac{3}{4} \text{ de } 8 = (8 : 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$$

más...

Fracciones y decimales

Las fracciones en las que el denominador es la unidad seguida de ceros se llaman fracciones decimales.

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Observa que con ellas es muy fácil expresar un número decimal exacto como una fracción, bastará escribir el número sin la coma en el numerador, y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$4{,}5 = \frac{45}{10} \qquad 0{,}05 = \frac{5}{100}$$

Ejemplos

- $\frac{3}{8}\ de\ 24 = (24 : 8) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$
- *Ana ha recorrido dos tercios de un trayecto de 120 km ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?*

$$\frac{2}{3}\ de\ 120 = (120 : 3) \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80\ km$$

1.2. La fracción como cociente

Una fracción también es una forma de indicar una división del numerador entre el denominador:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Si realizamos la división que nos indica una fracción podemos obtener:

• Un número natural	$\frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$
• Un número decimal exacto	$\frac{15}{4} = 15 : 4 = 3{,}75$
• Un número decimal periódico	$\frac{7}{3} = 7 : 3 = 2{,}3333\ldots = 2{,}\hat{3}$

Practica

1) *Calcula:*

a) $\frac{5}{8}$ *de 784* ***c)*** $\frac{1}{5}$ *de 315*

b) $\frac{3}{4}$ *de 236* ***d)*** $\frac{3}{10}$ *de 450*

2) *Escribe como decimal:*

a) $\frac{5}{8}$ ***c)*** $\frac{15}{6}$

b) $\frac{3}{4}$ ***d)*** $\frac{325}{10}$

Comprueba

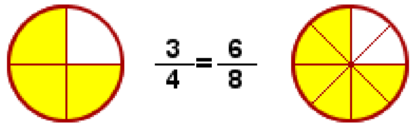
1. *a) 490*
b) 177
c) 63
d) 135

2. *a) 0,625*
f) 0,75
g) 2,5
h) 32,5

2. Fracciones equivalentes

Decimos que dos **fracciones** son **equivalentes** si representan la misma cantidad.

Fracciones equivalentes: $\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{6}{8}$



Las dos fracciones representan la misma cantidad, son **equivalentes**.

Ejemplo

- $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son fracciones equivalentes:

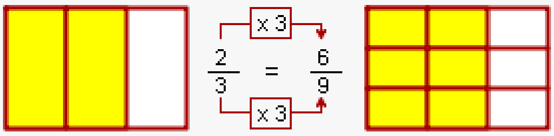
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75\\ \dfrac{6}{8} = 6:8 = 0{,}75\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Obtención de fracciones equivalentes

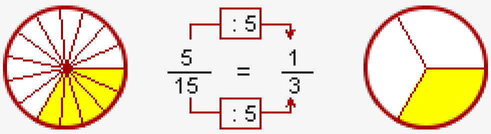
Si se multiplica o se divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, se obtiene una fracción equivalente a la dada.

Ejemplos

- $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\cdot 3}{3\cdot 3} = \dfrac{6}{9}$ *por tanto* $\dfrac{2}{3}$ *y* $\dfrac{6}{9}$ *son equivalentes*



- $\dfrac{5}{15} = \dfrac{5:5}{15:5} = \dfrac{1}{3}$ *por tanto* $\dfrac{5}{15}$ *y* $\dfrac{1}{3}$ *son equivalentes*



Criterio de equivalencia entre fracciones

Observa lo que ocurre al hacer los productos cruzados de dos fracciones (el numerador de una por el denominador de la otra) cuando son equivalentes y cuando no lo son:

Fracciones equivalentes:	**Fracciones no equivalentes:**
$\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9} \rightarrow \begin{cases} 2\cdot 9 = 18 \\ 3\cdot 6 = 18 \end{cases}$	$\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{2}{7} \rightarrow \begin{cases} 1\cdot 7 = 7 \\ 3\cdot 2 = 6 \end{cases}$
Los productos cruzados son iguales.	Los productos cruzados no son iguales.

Si dos fracciones son equivalentes, los productos cruzados son iguales:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c}$$

Este resultado nos permite calcular un término desconocido de dos fracciones equivalentes si se conocen los otros tres.

Ejemplos

- $\dfrac{4}{10} = \dfrac{6}{x} \rightarrow 4\cdot x = 10\cdot 6 \rightarrow 4\cdot x = 60 \rightarrow x = 60:4 = 15$
- $\dfrac{3}{5} = \dfrac{x}{15} \rightarrow 3\cdot 15 = 5\cdot x \rightarrow 45 = 5\cdot x \rightarrow x = 45:5 = 9$

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es obtener otra fracción equivalente **dividiendo** el numerador y el numerador por el mismo número.

- Si el numerador y el denominador de una fracción no tienen divisores comunes excepto el uno, no se puede simplificar, entonces decimos que es una **fracción irreducible**.

Ejemplo

- *Para obtener la fracción irreducible equivalente a* $\frac{18}{24}$:

$$\frac{18}{24} = \frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

Si el número por el que dividimos es el **máximo común divisor** de los dos términos de la fracción obtenemos directamente la fracción irreducible.

Ejemplo

- *Para obtener la fracción irreducible equivalente a* $\frac{18}{24}$:

$$m.c.d.(18,24) = 6 \qquad \frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$$

Practica

3) *Calcula el valor de x en las siguientes expresiones:*

a) $\frac{6}{3} = \frac{x}{13}$ **d)** $\frac{x}{17} = \frac{10}{85}$

b) $\frac{15}{x} = \frac{75}{20}$ **e)** $\frac{2}{6} = \frac{7}{x}$

c) $\frac{15}{45} = \frac{x}{18}$ **f)** $\frac{4}{10} = \frac{10}{x}$

4) *Simplifica las fracciones hasta obtener la fracción irreducible:*

a) $\frac{18}{30}$ **d)** $\frac{28}{40}$

b) $\frac{75}{20}$ **e)** $\frac{12}{28}$

c) $\frac{15}{45}$ **f)** $\frac{36}{60}$

Comprueba

3. *a) 26*
b) 4
c) 6
d) 75
e) 2
f) 25

4. *a) 3/5*
b) 15/4
c) 1/3
d) 7/10
e) 3/7
f) 3/5

2.1. Reducción a común denominador

Algunas operaciones con fracciones (comparar, sumar...) son muy sencillas si las fracciones tienen el mismo denominador.

Sin embargo realizar estas operaciones si tienen distinto denominador no es tan sencillo aparentemente. En estos casos utilizamos el método de **reducir a común denominador**.

Reducir a común denominador consiste en sustituir las fracciones dadas por otras equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador.

Para hacerlo seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Sustituimos cada fracción por otra equivalente que tenga por denominador el m.c.m. calculado.

Para ver un ejemplo del proceso fíjate en el ejemplo de la derecha.

Reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{1}{6}$$

m.c.m. (3, 6, 9) = 18

$$\begin{array}{ccc}
\frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{6} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\boxed{18:3=6} & \boxed{18:9=2} & \boxed{18:6=3} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{2\cdot 6}{3\cdot 6} & \frac{5\cdot 2}{9\cdot 2} & \frac{1\cdot 3}{6\cdot 3} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{12}{18} & \frac{10}{18} & \frac{3}{18}
\end{array}$$

Ejemplo

- *Reducir a común denominador las fracciones:* $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}$

  Se calcula el m.c.m. de los denominadores. m.c.m. (2, 3, 4) = 12

  Buscamos fracciones equivalentes a las dadas con denominador 12, multiplicando cada numerador por el mismo número por el que se multiplica el denominador.

$$\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 6}{2\cdot 6} = \frac{6}{12}$$

Comprueba

5. *a)3/15, 10/15*

b) 1/6, 3/6

c) 5/10, 4/10

d) 4/18, 3/18

e) 20/40, 35/40, 8/40

f) 9/36, 16/36, 18/36

g) 10/30, 24/30, 15/30

h) 5/20, 10/20, 4/20

Practica

5) *Reduce a común denominador:*

a) $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}$ **e)** $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ **f)** $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}$

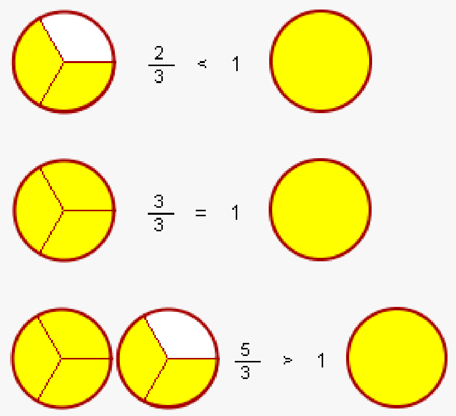
c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ **g)** $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{9}, \frac{1}{6}$ **h)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$

3. Comparación de fracciones

Comparación de fracciones con la unidad

Observa los siguientes ejemplos:



- *En la fracción dos tercios el numerador es menor que el denominador.*
  Se consideran menos partes que el total de partes en que está dividida la unidad.
- *En la fracción tres tercios el numerador es igual que el denominador.*
  Se consideran las mismas partes que el total de partes en que está dividida la unidad.
- *En la fracción cinco tercios el numerador es mayor que el denominador.*
  Se consideran más partes que el total de partes en que está dividida la unidad.

Una fracción puede ser:

- **Menor que uno** si el numerador es menor que el denominador.
- **Igual a uno** si el numerador es igual que el denominador.
- **Mayor que uno** si el numerador es mayor que el denominador.

Comparación de fracciones

- Si dos fracciones tienen el **mismo denominador**, es mayor la que tiene el mayor numerador.

Para comparar fracciones con **distinto denominador**, se reducen a común denominador y después se comparan.

Ejemplo

- *Ordenar de menor a mayor las fracciones:* $\frac{2}{3}, \frac{5}{6} y \frac{3}{4}.$

Se calcula el m.c.m. de los denominadores. m.c.m. (3, 6, 4) = 12

Buscamos fracciones equivalentes a las dadas con denominador 12.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$$
$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$$

Se ordenan las fracciones teniendo en cuenta que será menor la de menor numerador. $\frac{8}{12}<\frac{9}{12}<\frac{10}{12}\rightarrow\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$

más...

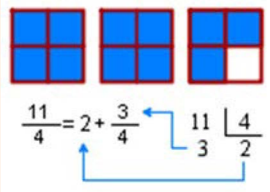
Números mixtos

Cualquier fracción mayor que la unidad se puede expresar como la suma de un número entero y una fracción menor que uno.

Si a>b la fracción $\frac{a}{b}$ se puede expresar de la forma:

$$\frac{a}{b}=c+\frac{d}{b}$$

donde c es el cociente de la división entera de a entre b, y d es el resto.



Es frecuente expresar estas fracciones sin el signo "+"

$$c\frac{b}{d}$$

Se les llama números mixtos.

Practica

6) *Ordena de menor a mayor las fracciones:*

a) $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}$

Comprueba

6. *a) 1/5<1/2<7/8*

b) 1/4<4/9<1/2

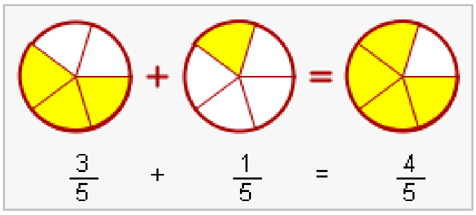
c) 1/3<1/2<4/5

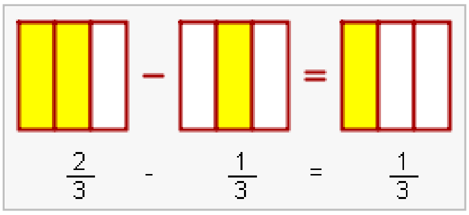
d) 2/3<5/7<4/5

4. Suma y resta de fracciones

Suma y resta de fracciones con el mismo denominador

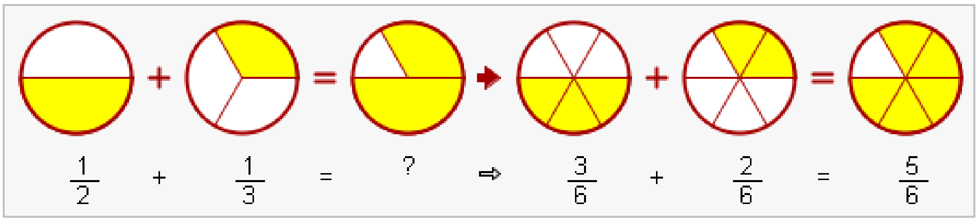
Para sumar o restar dos fracciones con el mismo denominador se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.





Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, se reducen las fracciones a común denominador y se suman o restan las fracciones resultantes.



Ejemplos

• *Calcula la suma:*	$\frac{3}{10}+\frac{8}{15}$
m.c.m.(10,15) = 30 $\frac{3}{10}+\frac{8}{15}=\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{8\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{9}{30}+\frac{16}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$	*Siempre que se pueda debemos simplificar el resultado*
• *Calcula la resta:*	$2-\frac{3}{4}$
$2-\frac{3}{4}=\frac{2}{1}-\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{1\cdot 4}-\frac{3}{4}=\frac{8}{4}-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$	*Si uno de los sumandos es un número entero lo consideramos como una fracción de denominador la unidad.*

Practica

7) *Calcula y simplifica:*

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{2}+\frac{7}{8}$

f) $\frac{1}{4}+\frac{4}{9}$

g) $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$

h) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

Comprueba

7. *a)13/15*

b) 2/3

c) 1/10

d) 1/18

e) 11/8

f) 25/36

g) 3/10

h) 1/20

Expresiones con sumas y restas de fracciones

Para calcular el valor de una expresión de varias sumas y restas de fracciones, se reducen a común denominador todos los términos y después se opera.

Si en la expresión aparecen paréntesis podemos proceder de dos formas distintas:

- Realizando primero las operaciones entre paréntesis.
- Quitando primero los paréntesis.

Ejemplos

- $\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+\frac{4}{5} \rightarrow m.c.m.(4,10,5)=20$

$[20:4=5]\ [20:10=2][20:5=4]$

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+\frac{4}{5}=\frac{3\cdot5}{4\cdot5}-\frac{3\cdot2}{10\cdot2}+\frac{4\cdot4}{5\cdot4}=\frac{15}{20}-\frac{6}{20}+\frac{16}{20}=$$
$$=\frac{9}{20}+\frac{16}{20}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

Recuerda que siempre que se pueda hay que simplificar.

- $\frac{9}{4}-\left(3-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{4}-\frac{11}{6}=\frac{9\cdot3}{4\cdot3}-\frac{11\cdot2}{6\cdot2}=\frac{27}{12}-\frac{22}{12}=\frac{5}{12}$

$$\boxed{3-\frac{7}{6}}=\frac{3}{1}-\frac{7}{6}=\frac{3\cdot6}{1\cdot6}-\frac{7}{6}=\frac{18}{6}-\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

Realizamos primero el paréntesis:
m.c.m .(1, 6) = 6
Sustituimos en la operación inicial el paréntesis por el valor obtenido y operamos:
m.c.m.(4, 6) = 12

- $\frac{9}{4}-\left(3-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{4}-3+\frac{7}{6}=\frac{9\cdot3}{4\cdot3}-\frac{3\cdot12}{1\cdot12}+\frac{7\cdot2}{6\cdot2}=$

$$=\frac{27}{12}-\frac{36}{12}+\frac{14}{12}=\frac{27-36+14}{12}=\frac{5}{12}$$

Quitamos primero el paréntesis. Recuerda que un menos delante del paréntesis cambia el signo de todos los términos de dentro. Después operamos:
m.c.m.(4,1,6) = 12

Practica

8) Calcula y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{8}{7}-\frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{7}{9}+1+\frac{3}{4}$

c) $4-\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{2}\right)$

d) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$

e) $\frac{4}{3}-\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)$

f) $\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)$

Comprueba

8. a) 1/6
b) 91/36
c) 31/14
d) 2
e) 7/12
f) 13/90

5. Multiplicación y división de fracciones

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos

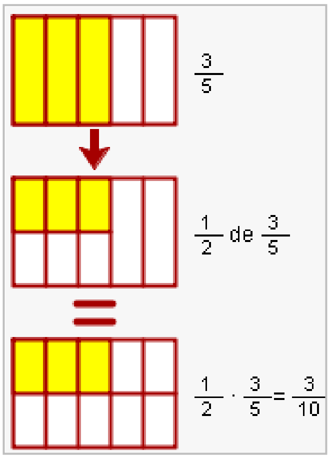
- $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ — *Recuerda que hay que simplificar siempre que se pueda.*
- $\frac{3}{4}\cdot 5=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 1}=\frac{15}{4}$ — *Como en la suma si aparece un número entero lo consideramos como una fracción de denominador 1.*

Recuerda que para calcular la fracción de un número se multiplica dicho número por el numerador y se divide por el denominador, es decir, las mismas operaciones que para multiplicar una fracción por un número entero.

$$\frac{3}{5}\ de\ 15=\frac{3}{5}\cdot 15=\frac{3\cdot 15}{5\cdot 1}=9$$

Del mismo modo una fracción de otra fracción es igual al producto de ambas fracciones.

$$\frac{3}{4}\ de\ \frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$



Fracción inversa

Dos **fracciones** son **inversas** si su producto es la unidad.

- La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$

Ejemplos

- *La fracción inversa de* $\frac{2}{5}$ *es* $\frac{5}{2}$ *porque* $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2\cdot 5}{5\cdot 2}=\frac{10}{10}=1$
- *La fracción inversa de* 4 *es* $\frac{1}{4}$ *porque* $4\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{4}{4}=1$

División de fracciones

Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplos

- $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$
- $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

Practica

9) *Calcula y simplifica:*

a)	$\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{7}$	***c)***	$\frac{5}{6}\cdot 8$	***e)***	$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}$
b)	$\frac{5}{3}:\frac{5}{9}$	***d)***	$2:\frac{1}{3}$	***f)***	$\frac{5}{4}:5$

más…

Regla practica

Para dividir dos fracciones se multiplican los términos cruzados:

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Comprueba

9. *a)1/7*

b) 3

c) 20/3

d) 6

e) 4/9

f) 1/4

Operaciones combinadas

Lo mismo que ocurre con el resto de los números, si en una expresión con fracciones aparecen distintas operaciones las resolveremos siguiendo la siguiente prioridad: primero los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones y por último, las sumas y restas.

Ejemplos

- $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
- $\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{6}=\left(\frac{4}{9}-\frac{3}{9}\right):\frac{1}{6}=\frac{1}{9}:\frac{1}{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
- $1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=1-\frac{1}{12}=\frac{12}{12}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

más...

Simplificar

Si realizando operaciones con fracciones nos aparece una fracción sin simplificar, conviene simplificar antes de realizar un cálculo, de esta forma conseguimos trabajar con números más pequeños.

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{8}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$$

Practica

10) *Calcula y simplifica:*

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{7}{4}+2\cdot\frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{8}\right)$

d) $1-\frac{5}{3}:\frac{9}{5}$

e) $2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$

f) $\left(\frac{5}{9}+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)$

Comprueba

10. *a) 616/15*

b) 59/20

c) 67/32

d) 2/27

e) 1/10

f) 682/2205

6. Problemas

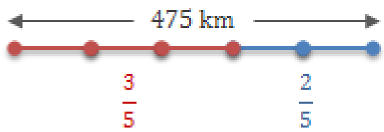
Hay muchos problemas en los que intervienen fracciones. A modo de ejemplo tienes a continuación una serie de ejercicios resueltos.

Fracción de una cantidad

1) *Viajamos de una ciudad a otra distante 475 km y hemos recorrido las 3/5 partes de la distancia. ¿Cuántos km nos quedan por recorrer?*

$$\frac{3}{5} \text{ de } 475 = \frac{3}{5} \cdot 475 = \frac{3 \cdot 475}{5} = 285\ km$$

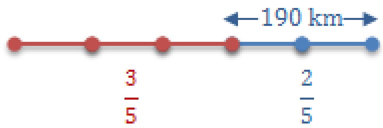
$$Quedan:\ 475 - 285 = 180\ km$$



2) *Viajamos de una ciudad a otra y cuando hemos recorrido las 3/5 partes de la distancia, aún nos quedan 190 km. ¿Cuántos km hay entre las dos ciudades?.*

$$Hemos\ recorrido\ \frac{3}{5}, quedan\ \frac{2}{5}\ que\ son\ 190\ km$$

$$Total = \frac{190 \cdot 5}{2} = 475\ km$$

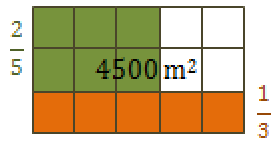


Suma y resta de fracciones

1) *Un agricultor ha sembrado las 2/5 partes de un campo de trigo y 1/3 de cebada. Si el campo tiene 4500 m², ¿qué superficie queda sin sembrar?.*

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}\ están\ sembrados$$

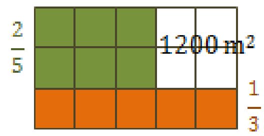
$$Quedan\ \frac{4}{15} \qquad \frac{4}{15} \cdot 4500 = \frac{4 \cdot 4500}{15} = 1200\ m^2$$



2) *Un agricultor ha sembrado las 2/5 partes de un campo de trigo y 1/3 de cebada. Si aún quedan 1200 m² sin sembrar, ¿qué superficie tiene el campo?.*

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}\ están\ sembrados$$

$$Quedan\ \frac{4}{15}\ que\ son\ 1200\ m^2 \qquad \frac{15 \cdot 1200}{4} = 4500\ m^2$$



Comprueba

11. *296 botellas*

12. *18 €*

13. *8 km*

14. *21 litros*

15. *100 m*

16. *3/5*

Practica

11) *¿Cuántas botellas de 3/4 de litro de capacidad se pueden llenar con 222 litros de agua?*

12) *Rosa sale a comprar y se gasta 1/3 del dinero que llevaba en un supermercado, después 1/2 en la frutería y vuelve a casa con 7 €. ¿Cuánto dinero llevaba antes de las compras?*

13) *Un senderista ha andado 1/4 del recorrido, y aún le quedan 6 km. ¿Cuántos kilómetros tiene el recorrido?*

14) *De un depósito de agua lleno con una capacidad de 54 litros, se saca un día 1/9 de su capacidad y al día siguiente 1/2 más. ¿Qué cantidad de agua queda en el depósito?*

15) *Un electricista ha gastado 4/9 partes de un rollo de cable de 180 m. ¿Cuánto cable le queda?*

16) *A una reunión han asistido 45 mujeres y 30 hombres. ¿Qué fracción del total representan las mujeres?*

1. Ejercicios

1. *Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes, una de las cuales ha de ser la irreducible.*

a) $\frac{6}{8}$ *b)* $\frac{12}{15}$ *c)* $\frac{14}{21}$

2. *Simplifica:*

a) $\frac{100}{250}$ *b)* $\frac{120}{156}$ *c)* $\frac{273}{546}$

d) $\frac{126}{180}$ *e)* $\frac{144}{243}$ *c)* $\frac{242}{330}$

3. *Ordena de menor a mayor tamaño:*

a) $\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{8}$ *b)* $\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{7}{10}$ *c)* $\frac{3}{4},\frac{11}{16},\frac{5}{8}$

4. *Calcula y simplifica el resultado si es posible:*

a) $\frac{3}{4}-1+\frac{1}{3}+\frac{5}{9}=$ *b)* $\frac{4}{15}+\frac{11}{18}-\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=$

c) $\frac{3}{5}+\frac{2}{10}+\left(\frac{12}{20}-\frac{3}{10}\right)=$ *d)* $\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)=$

e) $\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=$ *f)* $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{10}+\frac{7}{20}=$

5. *Calcula y simplifica el resultado si es posible:*

a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{12}{7}=$ *b)* $\frac{3}{8}+\frac{3}{2}:2=$

c) $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right):\frac{4}{5}=$ *d)* $\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=$

e) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{12}=$ *f)* $3:\frac{5}{4}-\frac{7}{2}:3=$

g) $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=$ *h)* $\frac{3}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{6}{16}=$

i) $\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right)=$ *k)* $\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{10}+2\right)\cdot\frac{1}{2}=$

l) $\left(1+\frac{1}{4}\right):3+\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{2}=$ *m)* $8\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\left(4:\frac{2}{3}\right)=$

n) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{9}\right)+\frac{1}{2}=$ *ñ)* $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=$

o) $\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{7}{3}-3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=$ *p)* $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}:\left[\frac{1}{5}+5\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)\right]=$

6. *Transforma cada fracción en un número decimal:*

a) $\frac{3}{10}$ *b)* $\frac{6}{8}$ *c)* $\frac{5}{4}$ *d)* $\frac{4}{5}$

e) $\frac{6}{25}$ *f)* $\frac{25}{1000}$ *g)* $\frac{19}{50}$ *h)* $\frac{21}{12}$

7. *Expresa en forma de fracción irreducible:*

a) 0,1 *b) 0,12* *c) 1,25* *d) 5,07*

e) 26,4 *f) 0,012* *f) 4,08* *g) 0,75*

8. *A una reunión de vecinos asisten 10 mujeres y 14 hombres, ¿qué fracción de los asistentes representan las mujeres?, ¿y los hombres?. Si los vecinos son 36, ¿qué fracción del total ha asistido a la reunión?.*

9. *Una huerta tiene una extensión de 3500 m^2 de los que 3/5 están sembrados de maíz y el resto de alfalfa. ¿Cuántos m^2 se han dedicado a cada cultivo?.*

10. *De una tarta que pesaba 1,2 kg se han consumido 5/8, ¿cuánto pesa el trozo que queda?.*

11. *3/4 de kg de queso cuestan 9,60€, ¿Cuánto cuesta 1 kg*

12. *En una finca hay 2400 m^2 dedicados a maíz y el resto a frutales, la parte dedicada a maíz supone 3/5 de la superficie total. ¿Cuál es la superficie total de la finca?.*
Si del terreno dedicado a frutales las 5/8 partes son para manzanos, ¿qué superficie se dedica a manzanos?

13. *La pureza del oro se mide en quilates. El oro puro tiene 24 quilates, lo que significa que de 24 partes las 24 son de oro.*

a) ¿Cuántos gramos de oro puro hay en un anillo de oro de 18 quilates que pesa 30 gramos.

b) ¿Cuántos gramos de oro puro hay en un lingote de un kilo de peso y 14 quilates?

14. *En una encuesta sobre consumo,1/2 de las personas encuestadas afirman que les gusta determinado refresco, 1/3 que no les gusta y el resto no contesta. ¿Qué fracción de los encuestados no contesta?. Si se preguntó a 1500 personas, ¿cuántas no contestaron?.*

15. *Un paseante recorre en la primera hora 3/7 del camino, en la segunda 1/4 del camino y en la tercera el resto. ¿Qué hora camina más deprisa?.*

16. *En una clase, 5/6 de los alumnos han aprobado un examen. Si 1/5 de los aprobados tiene calificación de notable, ¿qué fracción del total son notables?. Si la clase tiene 30 alumnos, ¿cuántos han obtenido notable?.*

17. *La cantidad de harina que se consigue del trigo es 4/5 del peso del mismo. Con la harina se obtiene una cantidad de pan que es 13/10 del peso de la misma. ¿Cuánto trigo hace falta para conseguir 260 kg de pan?*

Tecnología de la información 5

A lo largo de esta unidad, centrada en la informática, se va a llevar a cabo una introducción de varios aspectos importantes dentro del campo de los Sistemas Informáticos. Ordenadores, Internet, Procesadores de texto y Correo Electrónico son las piedras angulares sobre las que se desarrolla toda la unidad.

Se comienza con una descripción del ordenador desde un punto de vista conceptual y funcional, con la finalidad de que adquieras unos conocimientos básicos en relación al funcionamiento, arquitectura, componentes y periféricos de los Sistemas Informáticos. Seguidamente la unidad se centra en la descripción y manejo de un procesador de textos sencillo, y como siguiente apartado está la introducción a Internet, entender qué constituye Internet y algunos de los aspectos básicos de su funcionamiento será parte esencial del cometido de esta unidad. Para finalizar se explica uno de los principales servicios ofrecidos por Internet: el correo electrónico.

Al finalizar esta unidad deberás ser capaz de:

- *Reconocer los componentes básicos de un sistema informático, identificando las características del que uses habitualmente.*
- *Elaborar, almacenar y recuperar documentos sencillos, utilizando un procesador o un editor de textos tipo WordPad.*
- *Utilizar los servicios básicos de internet: navegación, uso de buscadores, y correo electrónico.*

1. El ordenador y sus elementos

más...

¿Sabías que?

Cuando instalamos un programa en un ordenador estamos configurándolo para que sus circuitos funcionen cumpliendo un propósito.

Por ejemplo, al instalar MS Word, estamos configurando el ordenador para emplearlo como un editor de textos; al instalar MS Excel, como una calculadora; si instalamos MS Access, como un archivo de datos, etc.).

La tecnología en general, y especialmente la tecnología informática y concretamente los ordenadores, han invadido todos los ámbitos de nuestra sociedad. La interacción con estos, en cualquier campo, es, hoy en día, algo esencial e imprescindible si queremos avanzar en la dirección adecuada en esta sociedad.

Un alto grado de conocimiento de las aplicaciones informáticas requieren también un profundo conocimiento de los componentes del ordenador, tanto hardware como software, sus funciones y su interrelación. Este primer bloque de la unidad ofrece una sencilla visión de estos últimos aspectos mencionados, concretamente los puntos que se tratan son:

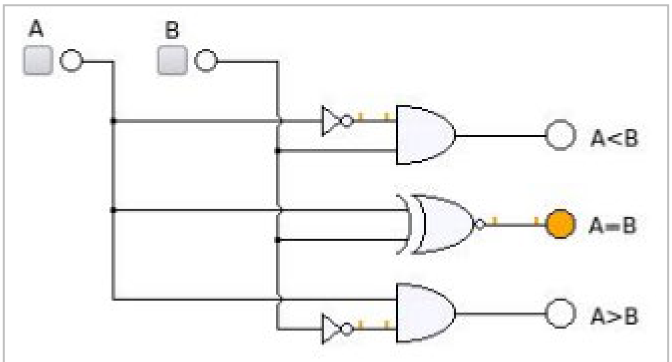
- Concepto de ordenador.
- Evolución.
- Lenguaje de ordenadores.
- Arquitectura de ordenadores.

1. Sistema Operativo.

- Periféricos básicos.

1.1. ¿Qué es un ordenador?

Los circuitos que se diseñan en electrónica digital resuelven un problema concreto, solucionan alguna necesidad. Por ejemplo, un comparador servía a sus usuarios para comparar dos números, indicándoles si eran iguales o, en caso de ser diferentes, cuál de ellos era mayor. Solo servía con un propósito, para el cual fue diseñado; no era posible hacer ninguna otra cosa con un comparador.



Comparador de dos bits

No es de extrañar que se idease un conjunto de circuitos que pudieran ser empleados para resolver varias tareas. Y así surgió el ordenador, una máquina de uso general que puede ser empleada para solucionar distintos problemas y cubrir demandas muy variadas.

Básicamente un ordenador es capaz de ejecutar una serie de instrucciones definidas. Combinando estas instrucciones de la forma adecuada, podemos conseguir que realice tareas más complejas.

1.2. Evolución de los ordenadores

Desde tiempos remotos, la humanidad ha empleado utensilios y desarrollado máquinas que le servían de ayuda en sus tareas cotidianas.

La primera máquina de cálculo de la que tenemos noticia, el ábaco, fue inventada en China en torno al año 300 a. de C. Con él se pueden resolver operaciones aritméticas (sumas, restas, divisiones, multiplicaciones) e incluso extraer la raíz cuadrada de números.

Mucho después el científico francés Blaise Pascal inventó una maquina de sumar mecánica. Le siguieron posteriores inventos que se basaban en procedimientos mecánicos. No fue hasta 1940 cuando, con la aparición de unas enormes computadoras llamadas mainframes, comenzó la era de los ordenadores modernos. Se trataba de máquinas centralizadas, que ocupaban edificios enteros y que requerían de personal muy especializado para su manejo. Estas circunstancias hacían que estos sistemas resultasen caros y estuvieran al alcance de unos pocos.

En 1990 hace su aparición el miniordenador, una máquina más pequeña y económica que los mainframes y que ocupaba menos espacio. Estos equipos ya estaban al alcance de grandes empresas.

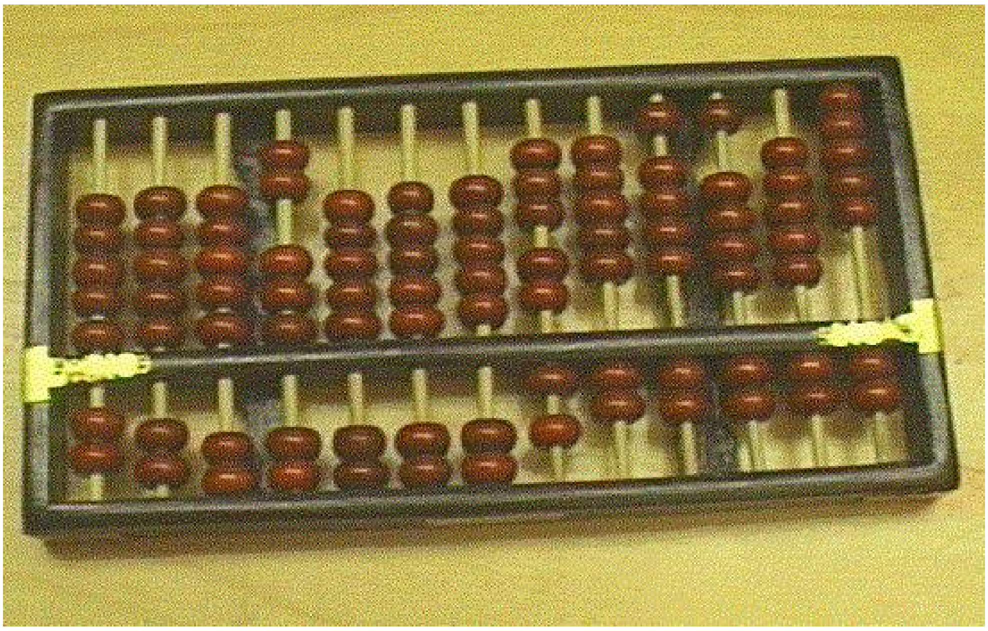
Una década después, como respuesta a la inquietud de agrupar todas las partes de un ordenador en una caja apropiada para usarla sobre un escritorio, aparece ordenadores más pequeños. La reducción de tamaño de los ordenadores fue paralela al diseño de circuitos cada vez más pequeños con distintas tecnologías de Circuitos Integrados. Estos equipos fueron bautizados como microordenadores. Algunos ilustres ejemplos: Commodore 64 o el ZX Spectrum.

En 1981, con el anuncio de la empresa IBM del lanzamiento de un nuevo ordenador personal, aparece el PC (Personal Computer). La diferencia entre este lanzamiento y los anteriores fue que IBM hizo pública la mayor parte de las especificaciones de los elementos internos de su producto, con lo que otros fabricantes pudieron utilizar la tecnología de esta empresa. Esta estrategia contribuyó enormemente a la difusión del PC de IBM, y abre el camino para las soluciones estándares y compatibles.

más...

IBM

A pesar de su popularización, estrictamente hablando, el termino Personal Computer, y su sigla PC, esta patentado por IBM, empresa que es por tanto, la única que puede utilizarlo legalmente, al menos de manera comercial.



1.3. Lenguaje de ordenadores

1.3.1. Sistema Binario

Como cualquier otro sistema de numeración nos permite representar cualquier número mediante la utilización de dos únicos dígitos, el 0 y el 1. Al igual que en el sistema de numeración decimal, el valor que toman estos dígitos depende de la posición de los mismos en el conjunto. En el sistema de numeración binario este valor viene determinado por una potencia de base 2.

- Imaginemos un numero binario **1111001**, ¿Qué valor representa este número en el sistema decimal?

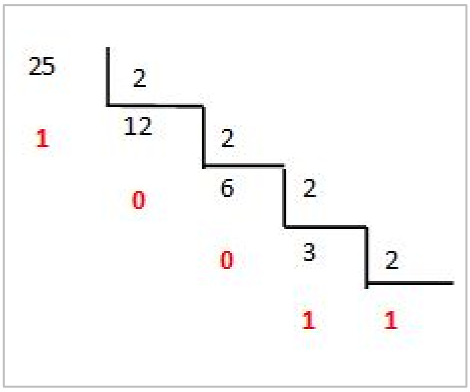
$$\mathbf{1111001 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}$$

  De esta manera el número binario **1111001** corresponde al número decimal de valor **121**.

Para realizar el proceso contrario, esto es, pasar de un número decimal a binario, bastará con dividir el número decimal entre 2 de forma sucesiva hasta que el cociente sea 1.

- Si consideramos el número decimal **25**, el proceso sería como puedes ver a la derecha.

  Así el número binario se obtiene tomando todos los restos de las divisiones junto con el último cociente, en el sentido de abajo a arriba: **11001**



Elige la correcta

El número binario 111000101 en el sistema decimal corresponde a:

- 44
- 560
- 455
- 467

Elige la correcta

El número 129 en el sistema decimal, corresponde al número en el sistema binario:

- 01100001
- 10100000
- 01010001
- 10000001

1.3.2. Codificación binaria

Para que un Sistema Informático pueda procesar los datos, estos deben ser traducidos a un código que el ordenador pueda entender. Esta transformación se denomina **codificación**.

El cerebro del ordenador (microprocesador) está formado por millones de interruptores diminutos que se activan y desactivan automáticamente. Cuando un interruptor está abierto, el microprocesador lo interpreta como un 0, y cuando está cerrado, como un 1. Existe una relación evidente entre los estados de un interruptor y el sistema binario, siendo este ideal para ser manejado por los ordenadores al tener únicamente dos dígitos, el 0 y 1. Todos los datos que un sistema informático maneja están codificados en binario, tanto números como caracteres.

La unidad más pequeña de representación de la información en un ordenador se denomina **bit** y se corresponde con un dígito binario: 0 o 1. Al conjunto de **8 bits** se le denomina **byte**. Tanto el bit como el byte son unidades de medida muy pequeñas, por lo que se necesita algunos múltiplos de byte. Así podemos hablar de las distintas unidades de medida de información que vienen relacionadas en la siguiente tabla:

Incremento de tamaño

UNIDAD	RELACION
1 **Terabyte** (TB)	1024 GB
1 **Gigabyte** (GB)	1024 MB
1 **Megabyte** (MB)	1024 KB
1 **Kilobyte** (KB)	1024 B
1 **Byte** (B)	8 bits

Observa que en este caso los múltiplos no se corresponden con las potencias de 10 como en el Sistema Métrico Decimal, 1 KB no son 1000 Bytes sino 1024 que corresponde a 2^{10}

más…

Codificación de caracteres

El código ASCII se utiliza para representar caracteres en ordenadores. Cada símbolo o letra se codifica mediante 8 bits. Se muestran algunos ejemplos:

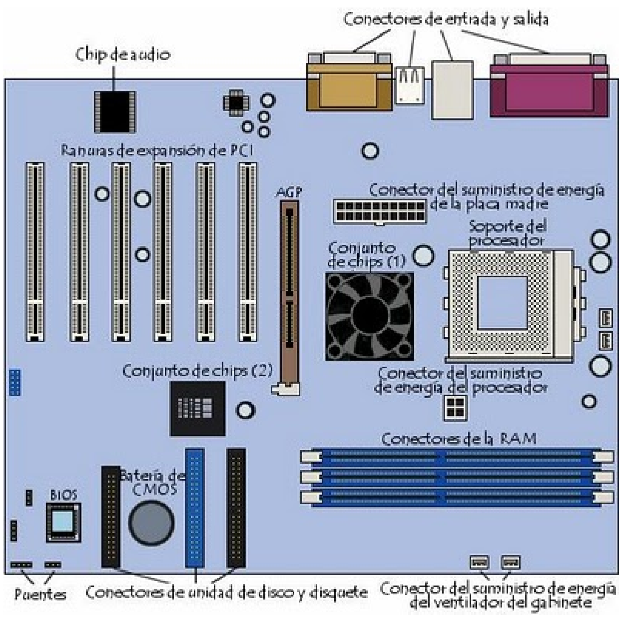
Carácter	Código ASCII
@	01000000
A	01000001
B	01000010

1.4. Arquitectura de ordenadores

1.4.1. Concepto

Se entiende por arquitectura de un ordenador el conjunto de las partes que lo componen, su función y las comunicaciones entre dichas partes que posibilitan su funcionamiento de forma conjunta y coordinada.

Una arquitectura nos da la ventaja de trabajar por bloques, que tienen perfectamente definidas sus funciones. Cada uno de estos bloques puede ser tratado de forma independiente, de manera que, cuando trabajamos con uno de ellos, podemos abstraernos del funcionamiento de los demás.



La ventaja de este procedimiento es clave: podemos cambiar o actualizar las distintas partes del sistema, o añadir nuevos componentes, manteniendo todos los demás.

1.4.2. Arquitectura de Von Neumann

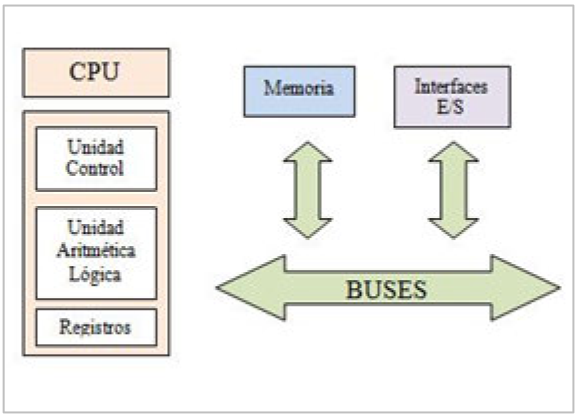
Los primeros ordenadores se programaban utilizando una serie de conexiones físicas en unos paneles de cableados que tenían para este propósito. Esto hacia que cada vez que se quería utilizar un nuevo programa, había que recablear el ordenador entero, prácticamente se tenía que reconstruir. Debido a esta circunstancia, la persona que manejaba el ordenador tenía que ser un experto en la máquina en cuestión.

En 1945 se rompe esta situación cuando **John von Neumann** introduce el concepto de programa almacenado. En este concepto se basan todos los ordenadores de hoy en día.

Según esta arquitectura, el programa se guardaría en memoria, junto con los datos, y el ordenador leería estos datos de la memoria y los interpretaría como un programa o como datos, según correspondiera.

La arquitectura de Von Neumann define cuatro componentes fundamentales: el procesador, la memoria, las interfaces de entrada y salida, y los buses, que se definen a continuación:

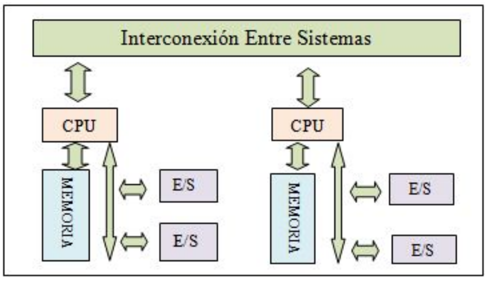
- **El procesador**: bloque que ejecuta todas las instrucciones y controla el funcionamiento del resto de los componentes.
- **Memoria**: almacena los datos que emplea el ordenador.
- **Interfaces de entrada y salida**: dispositivos que permiten intercambiar información con el exterior.
- **Buses**: son el conjunto de conexiones entre los distintos elementos de la arquitectura.



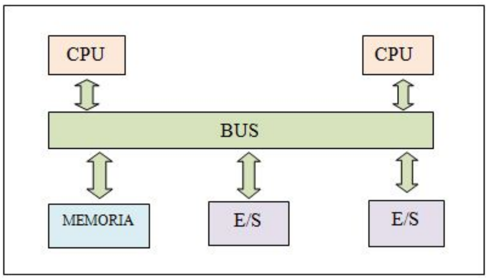
A lo largo de la evolución de los ordenadores, un objetivo claro de los fabricantes ha sido aumentar su capacidad de proceso. La forma más evidente, dejando a un lado la mejora de los distintos componentes, es utilizando varios procesadores en lugar de uno solo. De esta forma surgen las arquitecturas multiprocesador. Estas arquitecturas siguen los principios establecidos por Von Neumann.

Los equipos con varios procesadores pueden funcionar de dos maneras distintas dando lugar a dos arquitecturas diferentes:

Modo Independiente:
cada CPU ejecuta un programa

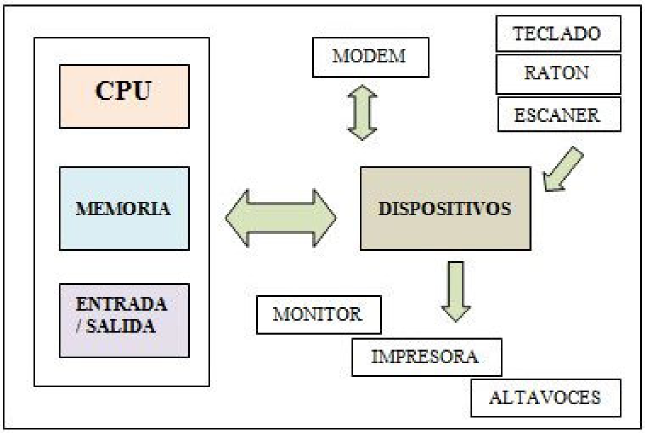


Modo paralelo:
varias CPU colaboran en la ejecución de un programa



1.4.3. Componentes de un ordenador

Un ordenador consiste básicamente en un procesador que ejecuta instrucciones, las cuales se agrupan en programas que se almacenan en la memoria del sistema. Coordinando todo esto con un variado conjunto de dispositivos, hoy en día, es posible realizar casi cualquier tarea con un ordenador.



El diagrama básico de un ordenador personal

Los componentes básicos son:

- **Placa Madre o Placa Base (Mother Board):** es el circuito principal sobre el cual se construye el ordenador. Alberga la CPU y las conexiones para el resto de componentes.
- **Disco Duro (HD, Hard Disk, HDD, Hard Disk Drive):** componente que nos permite almacenar la información de manera permanente, y conservarla cuando se apaga el ordenador.
- **Unidad Central de Proceso (UCP, CPU, Central Processing Unit):** se trata del microprocesador principal, que controla el funcionamiento del ordenador.
- **Memoria de Acceso Aleatorio (RAM, Random Access Memory):** donde se almacenan las instrucciones y datos que utiliza el usuario en una sesión de trabajo. Pierde la información cuando se apaga el ordenador.
- **Entrada y Salida (E/S):** conexiones accesibles sin necesidad de abrir el ordenador, que permiten conectar dispositivos de entrada y/o salida.
- **Ranuras de Expansión:** conexiones de la placa base que hacen posible conectar nuevos componentes al ordenador.
- **Otros dispositivos:** ratón, teclado, monitor, modem, etc.

1.4.4. Periféricos básicos

Los periféricos son dispositivos que no están conectados directamente a la placa base del ordenador, por tanto, no son fundamentales para su funcionamiento, pero si necesarios para realizar las más diversas tareas.

Los periféricos pueden clasificarse en periféricos de entrada, salida o ambas cosas simultáneamente.

más...

¿Sabías que...?

Se entiende por interfaz de usuario el conjunto de formularios y herramientas que este emplea para interactuar con los programas de ordenador.

Periféricos de entrada	Los datos fluyen hacia el ordenador. De entre los más comunes destacamos, el teclado, ratón, el escáner, lápiz óptico, tabletas gráficas, cámara de video y fotografía, el "touchpad" de los portátiles, micrófonos, joystick, etc.
Periféricos de salida	Los datos fluyen desde el ordenador hacia afuera. De entre los más comunes destacamos, el monitor o pantalla, impresora, altavoces, proyector, etc.
Periféricos de entrada y salida	En estos los datos fluyen en ambas direcciones, hacia y desde el ordenador. De entre estos periféricos destacamos el modem.

1.5. Sistema Operativo

1.5.1. El Sistema Operativo

El ordenador es un conjunto de circuitos electrónicos que requieren de un software para funcionar. Podemos distinguir, en general, dos tipos de software: el software de sistema y los programas de aplicación. El primero coordina los distintos componentes del ordenador para su correcto funcionamiento, y el segundo resuelve necesidades concretas de los usuarios.

El software de sistema básico de un ordenador, que controla todos los recursos de este, es el **Sistema Operativo** (S.O.). Es utilizado por los programas de aplicación para acceder a los recursos del sistema. El sistema operativo es un intermediario para acceder al hardware del sistema. Su objetivo principal es lograr que el ordenador se use de manera cómoda y eficiente.

Los primeros sistemas operativos eran en modo texto, los usuarios se comunicaban con el sistema por medio de comandos escritos utilizando el teclado. No disponían de ratón ni de un entorno gráfico en el que se pudieran presentar imágenes. En estas condiciones Unix era el sistema operativo por excelencia, aunque a mediados de la década de los 80 hizo su aparición el SO de Microsoft, o MS DOS.

Con la mejora de la tecnología, aumentan las capacidades de proceso de la CPU, las posibilidades de almacenamiento de datos y la velocidad de trabajo. Esto condujo a que los ordenadores empezaran a manejar cada vez más información, y se pudieran mejorar las interfaces de usuario de los S.O. dando lugar a los sistemas gráficos. Hoy en día, todos los S.O. incorporan interfaces gráficas para interactuar con el usuario. Los principales S.O. de este tipo son: las distintas versiones de Windows, Unix, Linux y MacOS.

1.5.2. Funciones y Clasificación de los Sistemas Operativos.

Las principales funciones de un Sistema Operativo son cuatro:

- **Gestión de recursos**. Controla el funcionamiento de todos los recursos del ordenador, esto es, discos duros, memoria, órdenes a periféricos, etc.
- **Presenta la interfaz de usuario**. Hace de intermediario entre el hardware del ordenador y el usuario del mismo.
- **Administra los archivos**. Se encarga de almacenar los datos de la memoria en unidades de almacenamiento.

- **Administra las tareas**: En aquellos sistemas que pueden gestionar más de una tarea simultáneamente.

Se pueden clasificar los Sistemas Operativos atendiendo a distintos criterios:

RESPECTO	CLASIFICACION	OBSERVACIONES	EJEMPLO
Modo trabajo usuario	Interactivo	Existe interacción entre el usuario y el S.O. durante la ejecución de los programas.	Sistemas de tiempo compartido.
	Por lotes	Una vez introducida una tarea, en el ordenador, el usuario no mantiene contacto alguno con ella hasta su finalización.	Sistemas por lotes.
Número de usuarios	Monousuario	Se accede a ellos mediante un único terminal.	MS-DOS
	Multiusuario	Existen varios terminales de acceso al sistema.	Unix
Propósito	General	Gran número de usuarios trabajando sobre muy diversas aplicaciones	Windows XP
	Especifico	Están especializados en una determinada tarea, como los sistemas de tiempo real.	Red Hat DataCenter
Numero de procesadores	Monoprocesador	Un único procesador realiza todas las tareas.	Windows 3.1.
	Multiprocesador	Varios procesadores realizan simultánea y sincronizadamente las tareas. Comparten reloj y memoria.	Windows Server 2008
	Distribuidos	Varios procesadores no sincronizados, sin compartir memoria.	Red Hat Enterprise

Verdadero o falso

De entre las siguientes afirmaciones elige las que consideres correctas:

	Verdadero	Falso
Mainfranes son enormes computadoras con las que nacio la era de los ordenadores modernos.	○	○
Mainframes requerían de personal especializado para su manipulación.	○	○
Los microordenadores fisicamente tenían mayor tamaño que los miniordenadores. Ocupaban el espacio de una habitación.	○	○
El termino PC es propiedad de IBM	○	○

Completa el texto

Se entiende por [Seleccione un valor] de un ordenador al conjunto de las partes que lo componen, su [Seleccione un valor] y las comunicaciones entre dichas partes que posibilita un funcionamiento de forma [Seleccione un valor] y también [Seleccione un valor]

Relaciona

Relaciona algunos de los componentes básicos de un ordenador con su funcionalidad.

Microprocesador principal	Placa Base
Permite almacenar información de forma permanente	Disco Duro
Conexiones accesibles sin abrir el ordenador	Unidad Central de Proceso
Conexiones en placa base permiten la conexion de nuevos componentes	Entrada/Salida
Circuitoprincipal sobre el que se constituye el ordenador	Ranuras de Expansión

Relaciona

Relaciona el tipo de Sistema Operativo con su característica principal:

Varios procesadores no sincronizados, sin compartir memoria	S.O. Interactivo
Existen varios terminales de acceso al sistema	S.O. Multiusuario
Un unico procesador realiza todas las tareas	S.O. Monoprocesador
Existe interacción entre usuario y S.O. durante ejecución de los programas	S.O. Distribuido

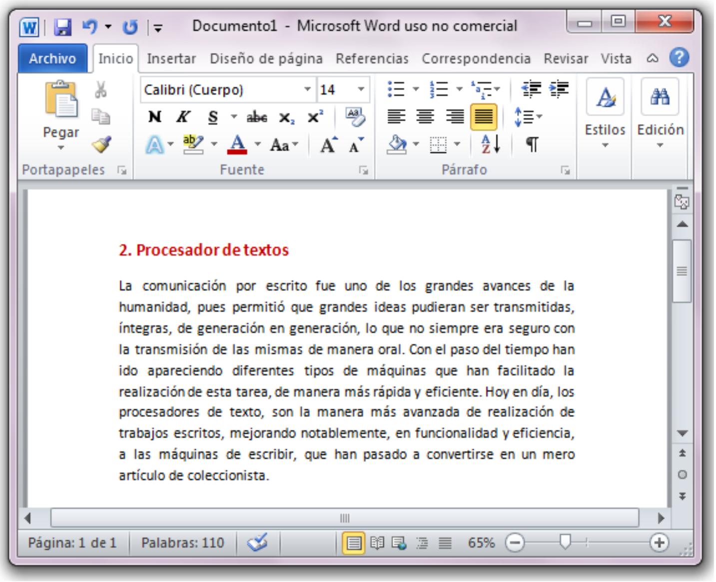
Elige la correcta

En un anuncio en el periódico hemos encontrado la siguiente información sobre una oferta de compra de un ordenador portátil: - Intel Pentium Dual Core P6000 1.83 GHz 4GB DDR3 320 GB 17" TFT. ¿Cuál es la información correcta aportada por el anuncio?

- ○ Procesador: Intel Pentium Core P6000; Memoria RAM: 4GB; Disco Duro: 320 GB; Pantalla de 17".
- ○ Procesador: Intel Pentium DC P6000; Memoria RAM 1.83 GHz; Disco: 4GB; Pantalla de 17".
- ○ Procesador IP DC P6000; Disco Duro de 320 GB; Unidad DVD de 4GB; Pantalla ed 17".
- ○ Procesador IP DC P6000; Pantalla de 17"; Disco Duro de 320 GB.

2. Procesador de textos

La comunicación por escrito fue uno de los grandes avances de la humanidad, pues permitió que grandes ideas pudieran ser transmitidas, íntegras, de generación en generación, lo que no siempre era seguro con la transmisión de las mismas de manera oral. Con el paso del tiempo han ido apareciendo diferentes tipos de máquinas que han facilitado la realización de esta tarea, de manera más rápida y eficiente. Hoy en día, los procesadores de texto, son la manera más avanzada de realización de trabajos escritos, mejorando notablemente, en funcionalidad y eficiencia, a las máquinas de escribir, que han pasado a convertirse en un mero artículo de coleccionista.



2.1. Concepto. Paquete Ofimática

Una de las principales aplicaciones para el usuario general de un ordenador es la realización o edición de textos escritos, para lo cual se emplean unos programas conocidos como editores y procesadores de texto. Actualmente los procesadores de texto constituyen una herramienta imprescindible para la comunicación escrita en la oficina, siendo su principal ventaja la de poder modificar un escrito tantas veces como se quiera, sin tener que repetir todo el proceso de escritura.

Actualmente la gama de procesadores de texto es enorme, diferenciándose unos de otros en características muy específicas que los hacen más apropiados para dar respuesta a tareas muy concretas. Así, por ejemplo:

Escritores, requerirán de características	. Diccionarios . Ortografía. . Sinónimos y antónimos. . Corrector gramatical.
Periodistas, requerirán de características	. Mezclar gráficos y texto. . Trabajar con varias columnas.

Muchos de los procesadores de texto más conocidos se engloban en paquetes de ofimática, conteniendo programas destinados al trabajo de oficina como: pequeñas bases de datos, hojas de cálculo, agendas, etc. Estos paquetes engloban todas estas aplicaciones de forma uniforme, dando valor añadido a las mismas con respecto a otras aplicaciones del mismo tipo individuales, no empaquetadas, puesto que facilitan la transferencia de datos entre las distintas aplicaciones que conforman el paquete. Ejemplo de paquetes ofimáticos serían: Microsoft Office como paquete comercial y OpenOffice como paquete de libre distribución.

más...

OpenOffice

Se trata de uno de los paquetes libres de ofimática más extendidos. Ofrece todas las funcionalidades principales de los mejores paquetes comerciales, así:

Procesador WRITER	
Base Datos BASE	
Hoja Calculo CALC	
Presentación IMPRESS	
Dibujos DRAW	

2.2. Editor y Procesador de textos

Los **editores de texto** no deben confundirse con los procesadores de texto. Un editor es un programa que permite crear y modificar archivos digitales compuestos únicamente por texto sin formato, comúnmente conocidos como archivos de texto o texto plano, sin diagramación. Sin embargo, un **procesador de texto** ofrece muchas más posibilidades en relación a la manipulación de un documento escrito. No solo permite la manipulación de texto, sino también otros muchos tipos de objetos: imágenes, tablas, macros, gráficos, etc.

La variedad de editores de texto es extensa, algunos son de uso general, mientras que otros están diseñados para escribir o programar en un lenguaje determinado, por ejemplo editores de HTML. Todos los editores de texto tienen una característica común: la curva de aprendizaje debe de ser muy corta, esto es, la persona que desea emplearlos no requiere de mucho tiempo para utilizarlo con destreza.

Ejemplo de editores de texto	WordPad (Windows) Emacs Vi (Unix) jEdit (multiplataforma)
Ejemplo de procesadores de texto	Word (Windows) Writer (multiplataforma)

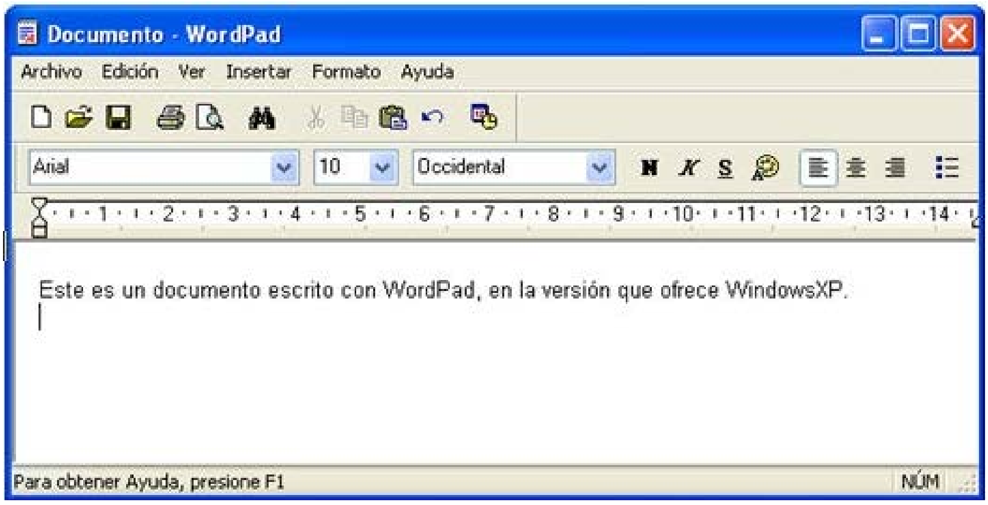
2.3. Características básicas de un Procesador de Textos

Comentaremos algunas de las características que resultan destacables y habituales en los procesadores de texto:

CARACTERISTICA	DESCRIPCION
WYSIWYG	“What you see is what you get” (lo que ves es lo que obtienes). Lo que se ve cuando se está trabajando en el documento es la apariencia real del mismo.
Configuración Paginas	Se puede personalizar el diseño de la pagina en lo que respecta a márgenes, orientación, tamaño de papel, etc.
Insertar Objetos	Es posible insertar una gran variedad de objetos en un documento, así, gráficos, imágenes, tablas, comentarios.
Gestión documentos	Con la opción “gestión de cambios” podemos mantener en un mismo fichero versiones sucesivas de un mismo documento. Cada cambio queda registrado. Cuando se comprueban los cambios estos pueden ser aceptados o rechazados, de forma individual o globalmente.
Proteger documento	Permite diseñar formularios, tal que, la persona encargada del diseño puede bloquear la modificación de la plantilla del formulario, dejando libres solo los campos que el usuario deberá rellenar.
Índices	De manera prácticamente automática, podemos crear índices y tablas de referencias cruzadas.
Subdocumentos	Se pueden crear “documentos maestros” (contenedor) para un conjunto de archivos separados (subdocumentos). Esto permite organizar un documento que tiene muchas partes, como un libro con varios capítulos.
Herramientas lenguaje	Se incluyen múltiples herramientas dependientes del lenguaje: correctores ortográficos, sintáctico, gramatical, búsqueda de sinónimos, etc.
Macros	A una acción o conjunto de acciones que se realizan con frecuencia se les puede asignar un nombre de macro, con lo que podemos automatizar las tareas repetitivas.

2.4. Editor de textos: WordPad

En este punto se van a describir el conjunto de opciones que presenta uno de los editores de texto más extendidos actualmente: **WordPad**. Este editor está presente en cada una de las versiones de los sistemas operativos que Microsoft ha puesto en el mercado, hecho este, que permitirá a cada usuario, de esta unidad, emplearlo sin necesidad de compra e instalación de la aplicación.

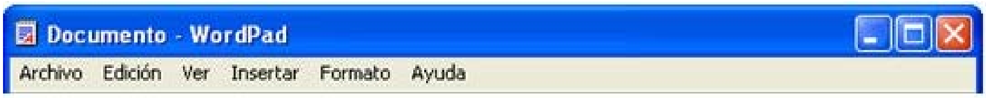


La versión que aquí se describe es la disponible en WindowsXP. Si trabajas con Windows7 encontrarás también WordPad con algunas utilidades mejoradas.

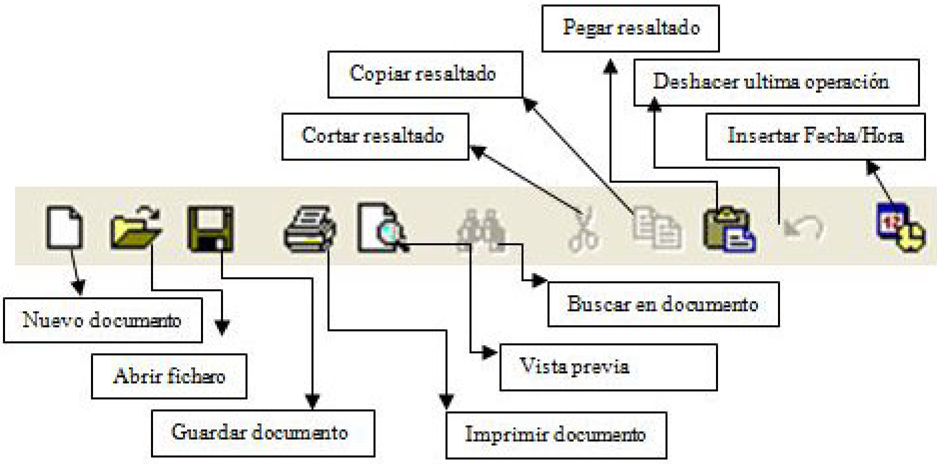
2.4.1. Partes de WordPad

WordPad se compone de cuatro zonas bien diferenciadas:

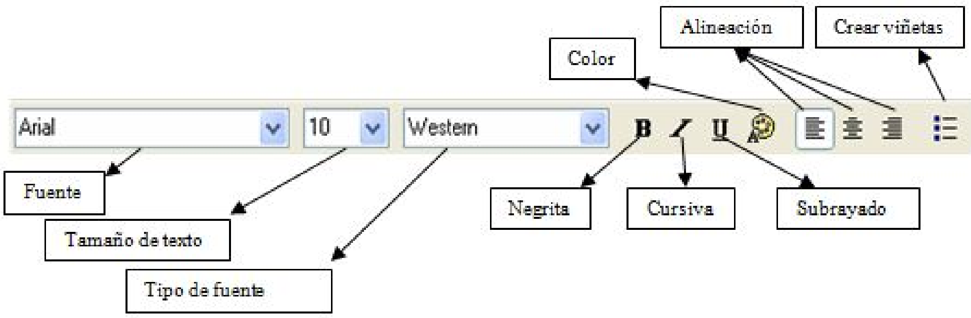
1. **Línea de menús**, que permite acceder a todas las acciones posibles de esta aplicación. Muchas de estas acciones se pueden realizar a través de los iconos de acceso rápido que luego trataremos.



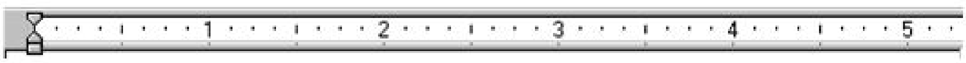
2. **Barra estándar**, que permite acceder, mediante iconos, a las acciones más comunes de esta aplicación.



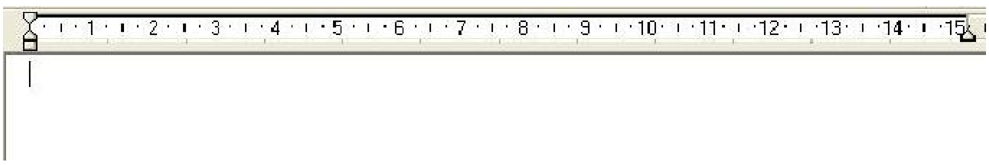
3. **Barra de formato**, permite acceder mediante iconos de rápido acceso a comandos de formato de texto. Sobre un texto seleccionado, nos permite cambiar el tipo de letra, su tamaño, estilo, efectos, color, alineación y viñetas. Prácticamente permite el acceso a todos los comandos del menú "Formato".



4. **Regla**, que permite definir con rigor el tamaño de los márgenes y tabulaciones del documento sobre el que se trabaja.



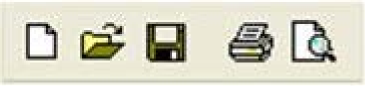
5. **Área de trabajo**, donde se realiza la escritura.



2.4.2. Menú Archivo

Permite acceder a las siguientes → operaciones en la aplicación.

Desde la **barra de herramientas**:



OPERACIÓN	DESCRIPCION
Nuevo	Crea un nuevo documento en blanco de WordPad.
Abrir	Permite abrir un fichero de WordPad previamente almacenado.
Guardar	Graba un documento, se emplea como medida de seguridad.
Guardar como	Graba un documento ya existente con un nuevo nombre o para asignar en la grabación un nombre a un nuevo documento.
Imprimir	Permite elegir la impresora y propiedades de impresión. Imprime el documento.
Vista previa	Permite observar el documento en pantalla tal y como posteriormente se imprimirá.
Configurar pagina	Establece la orientación del papel y otros atributos.
Enviar	Envía el documento a otras ubicaciones del sistema.
Salir	Permite abandonar la aplicación.

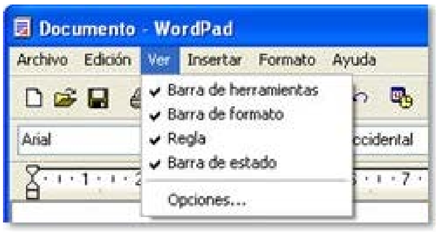
2.4.3. Menú Edición

Contiene los siguientes comandos →

Desde la **barra de herramientas**:

OPERACIÓN	DESCRIPCION
Deshacer	Deshace el ultimo comando ejecutado
Cortar	Elimina el texto seleccionado y lo almacena en el portapapeles.
Copiar	Copia el texto seleccionado y lo almacena en el portapapeles.
Pegar	Inserta el texto del portapapeles en el documento.
Pegado especial	Pega información de enlace entre documentos.
Borrar	Elimina el texto seleccionado del documento.
Seleccionar todo	Selecciona todo el texto del documento.
Buscar	Busca palabras o frases dentro del documento escrito.
Reemplazar	Cambia palabras o frases por otras palabras o frases.

2.4.4. Menú Ver y Ayuda



El menú **"Ver"** contiene los siguientes comandos:

OPERACIÓN	DESCRIPCION
Barra de herramientas	Permite insertar en la aplicación los iconos de herramientas cuando esta seleccionado.
Barra de formato	Muestra los iconos de formato cuando esta seleccionada.
Regla	Muestra la regla en la aplicación cuando esta seleccionada.
Opciones	Muestra opciones de texto.

El menú **"Ayuda"** contiene los siguientes comandos:

OPERACIÓN	DESCRIPCION
Temas de ayuda	Permite hacer una búsqueda de tópicos de la aplicación.
Acerca de WordPad	Nos permite conocer la versión de la aplicación con la que estamos trabajando.

2.4.5. Menú Insertar

Contiene los siguientes comandos →

Desde la barra de formato se accede sólo a insertar "Fecha y hora". En este punto es donde la versión que aporta Windows7 tiene mayor funcionalidad, ya que permite insertar una imagen directamente como tal y no como objeto.

OPERACIÓN	DESCRIPCION
Fecha y hora	Se emplea este comando para insertar la fecha y hora en el documento con un determinado formato.
Objeto	Inserta diferentes tipo de objetos, desde un archivo de video, hasta un pdf, etc.

2.4.6. Menú Formato

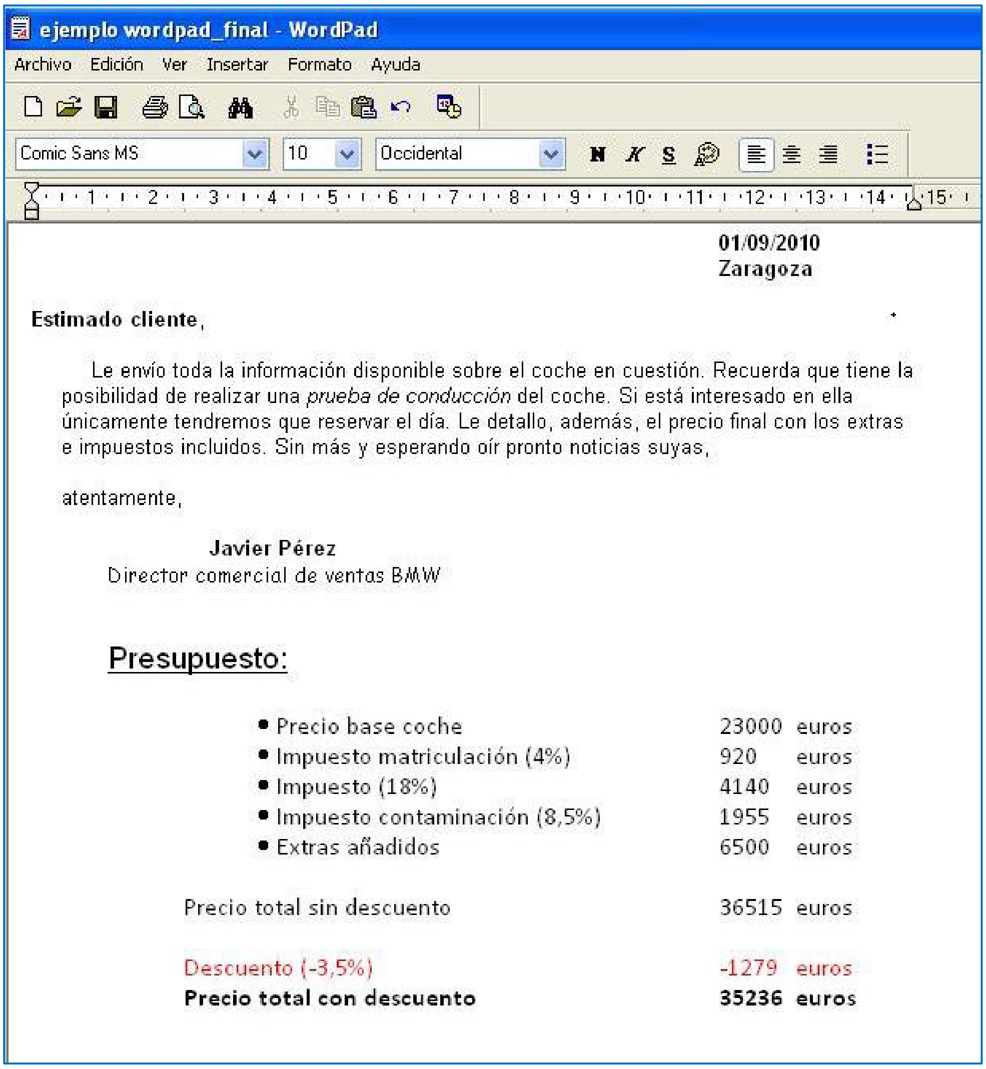
Contiene los siguientes comandos →

A los que también se accede desde la **barra de formato**:

OPERACIÓN	DESCRIPCION
Fuente	Permite seleccionar la forma de la letra, además de su color, tamaño, efectos y estilo.
Estilo viñeta	Añade un punto inicial en las líneas de un listado para representar un estilo viñeta.
Párrafo	Permite definir la sangría y alineación de un determinado párrafo.
Tabulaciones	Permite definir los puntos de tabulación de un documento.

2.5. Generar un documento en WordPad

Llegados a este punto, practicaremos el uso del editor de textos escribiendo un pequeño documento que quedará finalmente de la forma:



01/09/2010
Zaragoza

Estimado cliente,

Le envío toda la información disponible sobre el coche en cuestión. Recuerda que tiene la posibilidad de realizar una *prueba de conducción* del coche. Si está interesado en ella únicamente tendremos que reservar el día. Le detallo, además, el precio final con los extras e impuestos incluidos. Sin más y esperando oír pronto noticias suyas,

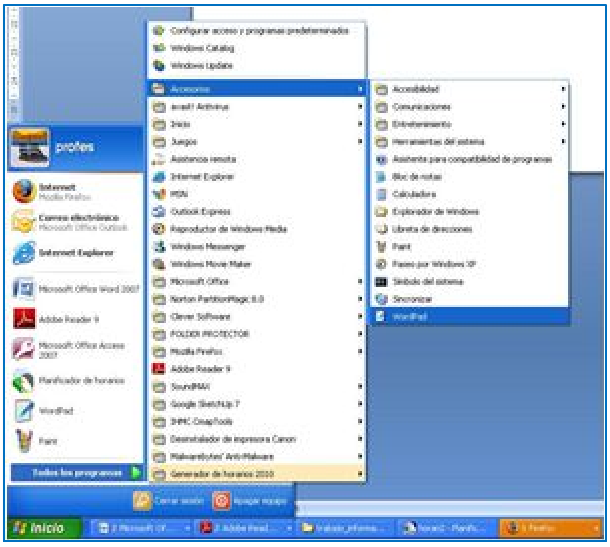
atentamente,

Javier Pérez
Director comercial de ventas BMW

Presupuesto:

• Precio base coche	23000	euros
• Impuesto matriculación (4%)	920	euros
• Impuesto (18%)	4140	euros
• Impuesto contaminación (8,5%)	1955	euros
• Extras añadidos	6500	euros
Precio total sin descuento	36515	euros
Descuento (-3,5%)	-1279	euros
Precio total con descuento	**35236**	**euros**

2.5.1. Crear, abrir y guardar el documento.



Para crear un documento en WordPad lo primero será ABRIR la aplicación, para ello, pulsaremos en el botón **"inicio"** del escritorio, iremos a **"todos los programas"**, ahí a **"accesorios"** y finalmente a **WordPad**.

Realización

Para nuestro ejemplo crearemos un nuevo documento y lo guardaremos como *"ejemplo.txt"* (comando "guardar como").

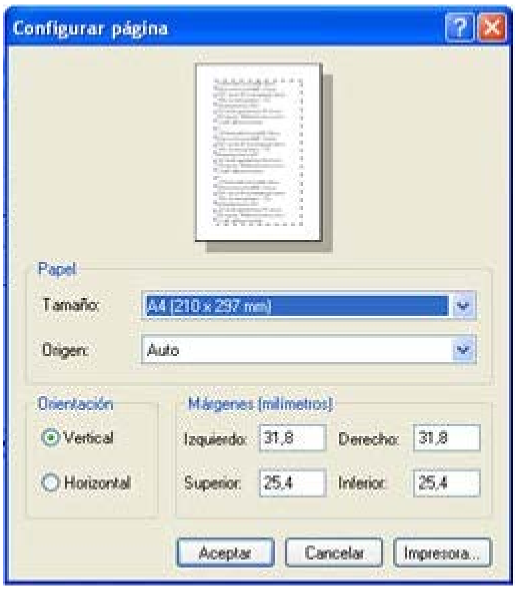
El que tenga nombre, pero no contenido, nos permite ir realizando copias de seguridad, con el comando guardar, al tiempo que lo vamos desarrollando.

Para	Hacer esto
Crear un documento nuevo	Hacer clic en el botón de menú "Archivo" y, a continuación, haga clic en "Nuevo".
Abrir un documento	Hacer clic en el botón de menú "Archivo" y, a continuación, hacer clic en "Abrir".
Guardar un documento	Hacer clic en el botón de menú "Archivo" y, a continuación, hacer clic en "Guardar".
Guardar un documento con un formato o un nombre nuevo	Hacer clic en el botón de menú "Archivo", apunte a "Guardar como" y, a continuación, escribir el nombre del archivo y elegir el formato con el que se desea guardar el documento.

2.5.2. Escribir en WordPad.

Para escribir un documento en WordPad, una vez abierta la aplicación y habiendo asignado un nombre al documento (al guardarlo como), tendremos que utilizar el área de trabajo de la aplicación.

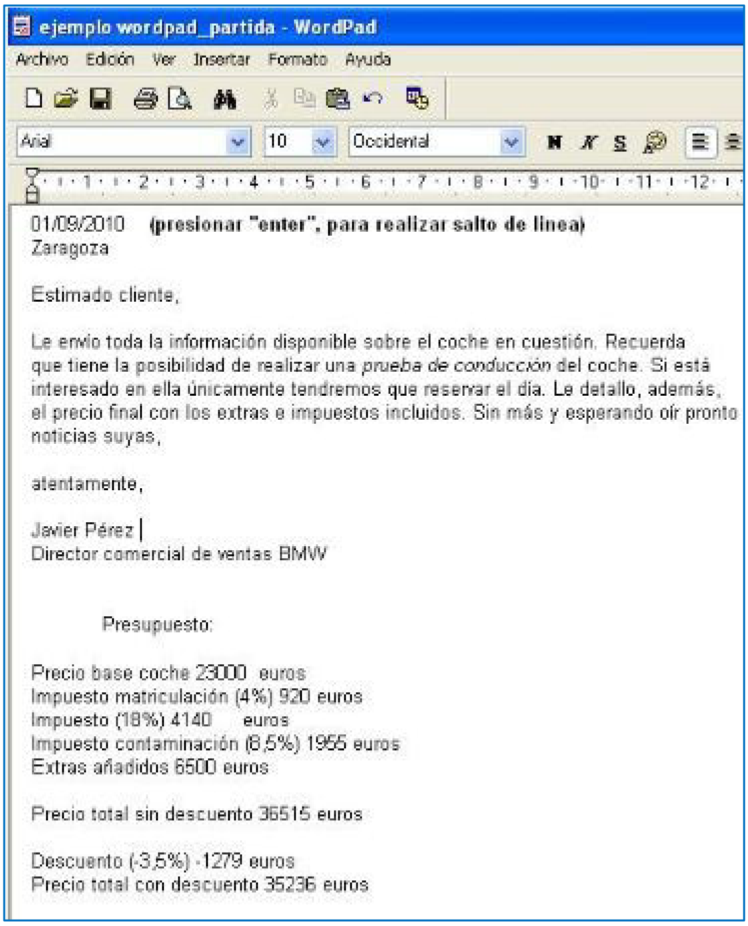
Inicialmente podemos configurar la página mediante el comando **"configurar página"** del menú **"archivo"**. Con este comando podemos definir el tamaño de la hoja de papel a emplear, la orientación del texto en la hoja y los márgenes de la misma.



Realización

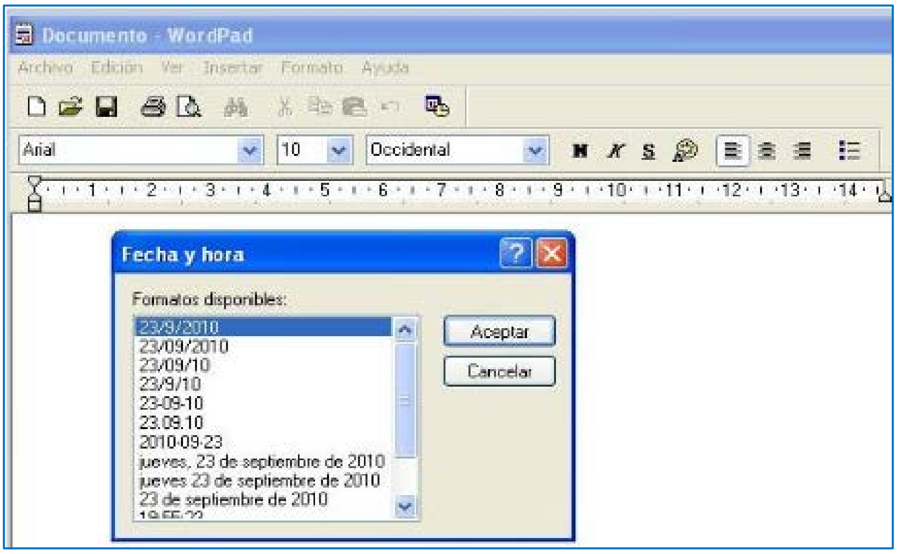
Por defecto la hoja está configurada a nuestro gusto (A4, orientación vertical y márgenes adecuados).

Seguimos escribiendo el texto sin formato en el área de trabajo, quedando éste como muestra la imagen de la derecha.



2.5.3. Insertar fecha y otros objetos

La inserción de una fecha u otro tipo de objetos (imágenes, documentos de Word, hojas de cálculo, etc.) es inmediato utilizando la acción del menú insertar. Podemos elegir el formato más adecuado de la fecha y para cualquier otro objeto, su tipo.



Realización

En nuestro ejemplo deberemos insertar la fecha, en el formato indicado, al comienzo del documento. El resto del documento es texto sin más, no requiriendo ninguna acción especial.

2.5.4. Formatear un documento.

El concepto de formateo está relacionado con la apariencia que tendrá el texto del documento, así como su organización. Para realizar cambios de formato rápidos podemos emplear la barra de formato que está justo encima de la regla del documento.

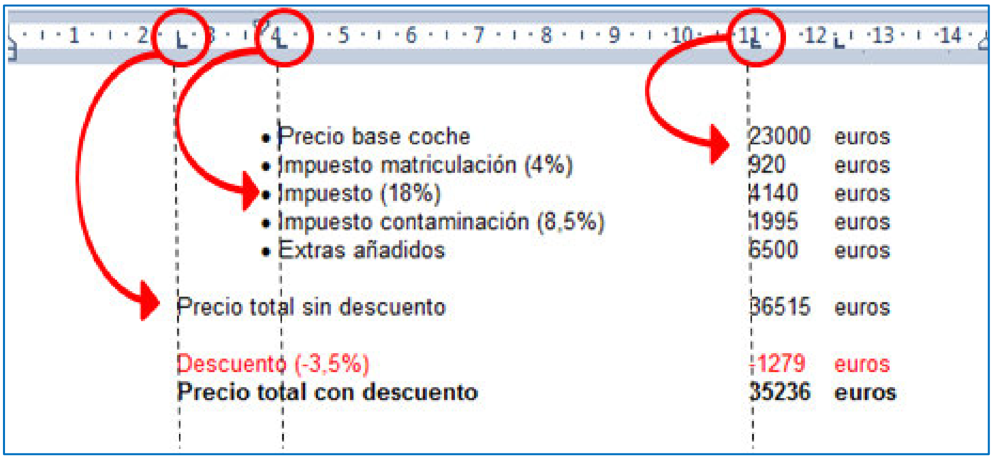
Para realizar esta tarea empleamos los siguientes comandos:

Para	Hacer esto
Cambiar el aspecto del texto en el documento	Seleccionar el texto que se quiere cambiar, para a continuación usar el menú “Formato” y “Fuente” para modificarlo
Cambiar el aspecto de la alineación del texto en el documento.	Seleccionar el texto que se quiere cambiar. Usar en el menú “Formato” el comando “Párrafo”
Insertar tabulaciones	Permite colocar puntos de inicio de línea en distintas posiciones del documento. Nos movemos hasta ellos por medio de las teclas de tabulación.
Viñetas	Nos permite incluir viñetas en el documento

Realización

Una vez escrito el texto del documento sin formato, debemos aplicarle el apropiado formato para dejarlo como el documento inicial propuesto. Así:

- **Cambiar tipo de texto, tamaño, color y efectos**: seleccionamos ese texto y en el menú "formato" pulsamos sobre **"fuente"**.
- **Tabulaciones**: Para cambiar la posición de comienzo de una línea podemos fijar la posición de los tabuladores accediendo al menú "formato" y a **"tabulación"**.
- **Viñetas**: nuestro documento contiene texto en viñetas, elegimos la posición donde queremos que comience este texto y accedemos a menú "formato", seleccionamos **"viñetas"**.



2.5.5. Vista preliminar e impresión.

Para confirmar que el documento está correctamente formateado, podemos visualizarlo, tal y como quedara en la realidad, mediante la acción **"vista preliminar"** del menú **"archivo"**.

Si todo es correcto, ya solo queda guardar definitivamente el documento con la acción **"guardar"** del menú **"archivo"** o, por ejemplo, imprimir el documento, mediante la acción **"imprimir"** también del menú **"archivo"**. El comando "imprimir" permite seleccionar la impresora y ciertos parámetros de impresión como son: número de copias, páginas para imprimir, etc.

Relaciona

Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con los de la derecha.

Podemos crear índices y tablas de referencia cruzada.	Insertar Objetos
Se pueden crear documentos maestros para un cojunto de archivos separados.	Subdocumentos
Lo que se ve es lo que se obtiene.	Indices
Posibilidad de contener una gran variedad de objetos.	Macros
Una acción o conjunto de acciones que se realizan con frecuencia.	WYSIWYG

Relaciona

Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con los de la derecha.

Para escribir.	Linea de Menú.
Acceso a todas las opciones disponibles.	Barra Estandar.
Acciones más comunes.	Barra Formato.
Acciones de formato.	Regla.
Tamaño márgenes y tabulaciones.	Área Trabajo.

Verdadero o falso

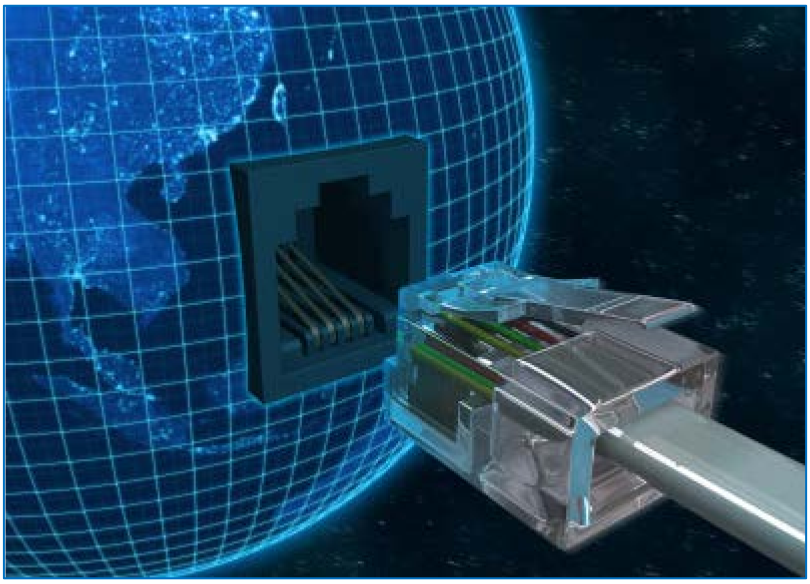
De entre las siguientes afirmaciones sobre un paquete ofimático, señala cuales son correctas y cuáles no.

	Verdadero	Falso
Contiene diferentes aplicaciones independientes.	○	○
Valor añadido respecto a la integracion de datos.	○	○
Se trata de una unica aplicación compleja.	○	○
OpenOffice es una versión gratuita de este tipo de paquetes	○	○

3. Internet. Navegación y buscadores

El inicio de Internet se remonta a principios de los años 60, cuando los EEUU montan una red exclusivamente militar, tal que se pudiera tener acceso a contenido militar desde cualquier parte del país. Desde esta concepción de red, hasta lo que hoy día conocemos como Internet, se han ido dando progresos en todos los campos de la Informática y, en especial, en lo referente a los dispositivos de comunicación. A medida que se han mejorado estos dispositivos de comunicación se han ido desarrollando nuevas aplicaciones más exigentes en cuanto a recursos de red, siendo claros ejemplos de estos avances los buscadores y navegadores actuales.

A lo largo de este bloque trataremos aspectos referentes a Internet con el objetivo de entender mejor que es y su funcionamiento. Trataremos también el concepto de navegación y de buscadores.



Servicios de Internet

Básicamente Internet se usa para buscar y compartir información. A esta información se puede acceder de diversas formas, lo que da lugar a los distintos servicios de Internet. Los principales servicios son los siguientes:

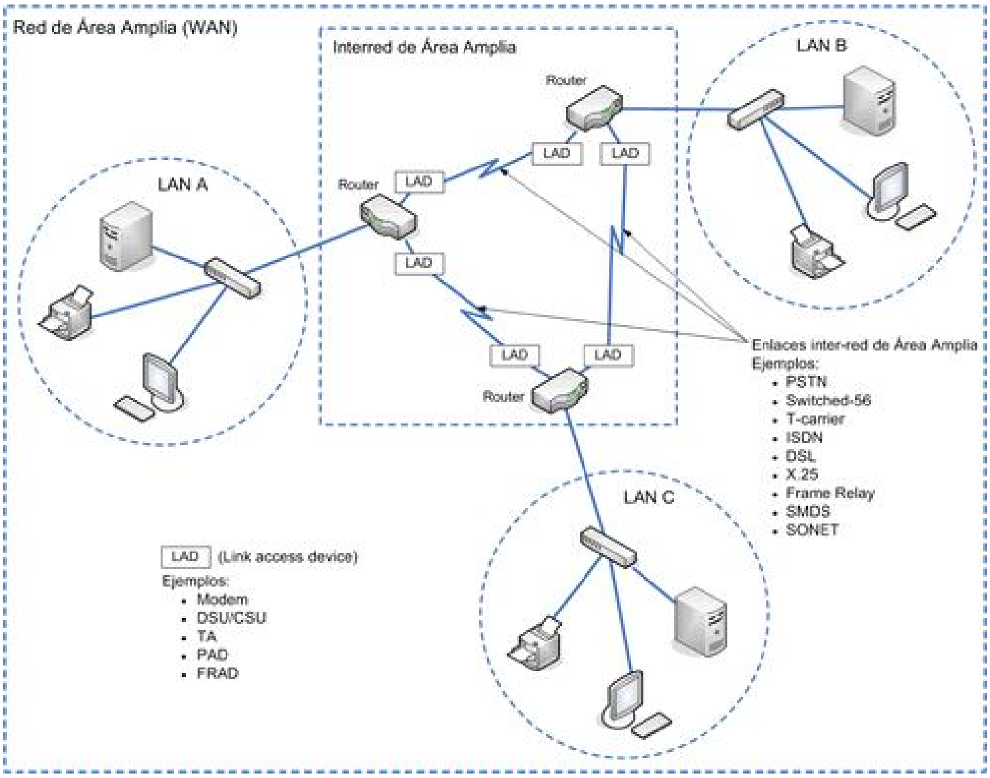
- Consulta de **páginas web** (*hipertexto o www*). Con este servicio el usuario puede navegar por un conjunto de documentos.
- **Correo electrónico** (*e-mail*). Permite enviar y recibir mensajes de texto a una dirección electrónica y adjuntar, además, otros elementos multimedia.
- **Chats**. Los usuarios pueden entablar una conversación en tiempo real.
- **Grupos de noticias** (*news*). Funciona de forma similar a un tablón de anuncios, en el que, clasificados por temas podemos acceder a nuestros mensajes y leer los de otros usuarios.
- **Conferencias**. Los usuarios pueden verse y oírse en tiempo real.
- **Transferencia de archivos** (*FTP: File Transfer Protocol*). Un servicio que permite la transferencia de archivos entre los usuarios de Internet.
- **Intercambio de archivos**, con este nombre se hace referencia a un servicio que permite a usuarios particulares intercambiar archivos de sus ordenadores sin la intervención de servidores externos (FTP). Este servicio ha impulsado la copia y distribución ilegal de software y música.

3.1. Redes de ordenadores. Internet

¿Qué ocurre si queremos compartir información con un compañero, por ejemplo de la oficina? La única solución, inicialmente, sería almacenar dicha información en un soporte físico y dársela a nuestro compañero. ¿Y si esta información la queremos compartir con un gran número de personas, que ni siquiera se encuentran ubicadas en el mismo lugar? La solución es conectar entre si los ordenadores de tal forma que se puedan comunicar entre ellos. Nace de esta forma el concepto de **Red** de ordenadores: dos o más ordenadores conectados, de forma que desde cada uno de ellos se puede ver y utilizar la información contenida en los otros.

Supongamos que tenemos dos grandes redes de ordenadores aisladas, que podrían ser dos sedes de una determinada empresa ubicadas en diferentes países. Si interconectamos estas dos redes mutuamente se crea una red de redes. Lógicamente para poder interconectar varias redes, es imprescindible que todas hablen el mismo idioma, es decir, usen los mismos códigos.

A la generalización de la interconexión de muchas redes a escala mundial se le conoce con el nombre de **Internet**.

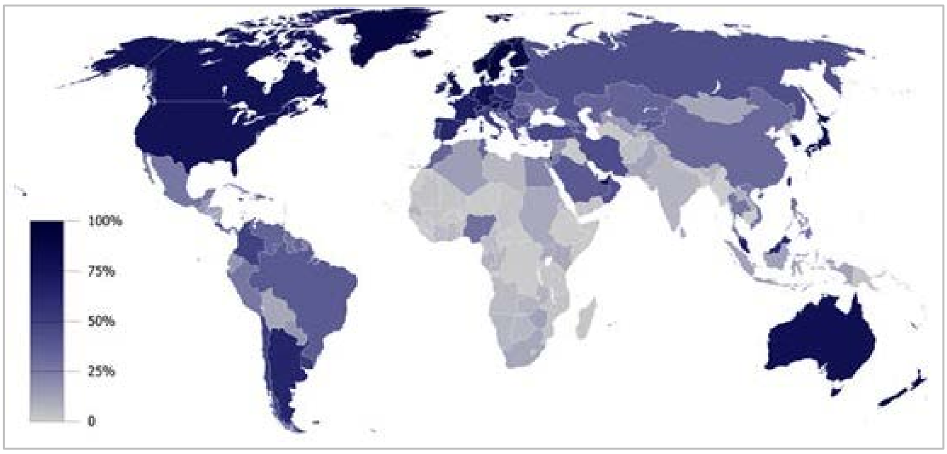


3.2. Funcionamiento de Internet.

Como usuarios de Internet, posiblemente estemos únicamente interesados en que nos puede ofrecer esta red de redes, y poco nos importe su funcionamiento, sin embargo, el conocimiento de varios conceptos básicos relacionados con esta red, sin duda, puede favorecer un mejor uso de la misma.

Vamos a describir los siguientes conceptos:

- ***Proveedores de acceso a Internet.***
- ***Localización de un ordenador en Internet.***
- ***Servidores de nombre de dominio.***
- ***Protocolo TCP/IP.***



Usuarios de Internet en el mundo (Fuente: Wikipedia)

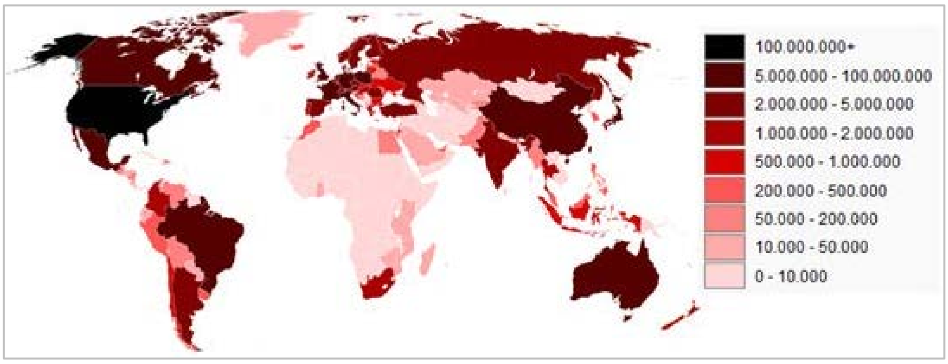
3.2.1. Proveedores de acceso a Internet.

Existen dos maneras generales de conexión a Internet:

- **Conexión directa** que tiene carácter permanente, es decir, se está continuamente conectado a Internet. La conexión es inmediata y no habrá que esperar ningún proceso de inicio de sesión.
- **Conexión remota** que requiere realizar la conexión siempre que queramos utilizar Internet, validando al usuario en cada intento de conexión, aunque este proceso no sea visible para el usuario. Son este tipo de conexiones las que se emplean a nivel doméstico.

Para que un usuario pueda realizar una conexión remota debe utilizar los servicios de alguna empresa que disponga de conexión directa. Este tipo de empresas son conocidas como Proveedores de Servicios de Internet, o **ISP**, y deben tener dado de alta al usuario que quiere acceder remotamente.

La conexión entre el cliente remoto y el ISP suele realizarse a través de la línea telefónica convencional, existiendo otras posibilidades como cables coaxiales, antenas parabólicas, etc.



Proveedores de Internet por países (fuente: Wikipedia)

3.2.2. Localización de un ordenador en Internet

Cada ordenador conectado a Internet debe de ser identificable inequívocamente a fin de localizarlo con rapidez y seguridad. Existen dos formas de localizar un ordenador en Internet: mediante la ***dirección IP*** y mediante el ***nombre de dominio***.

- ***Localización usando dirección IP***.

  Cada ordenador conectado a Internet tiene una dirección IP única. La dirección IP está formada por cuatro grupos de números separados por puntos y cada uno de estos grupos puede tomar valores entre 0 y 255. Ejemplo de una dirección IP: 215.214.52.104.

más...

Ampliación

Una Intranet es una red de ordenadores privada basada en los estándares de Internet, en especial TCP/IP.

Las Intranets utilizan tecnologías de Internet para enlazar los recursos informativos de una organización, desde documentos de texto a documentos multimedia, desde bases de datos legales a sistemas de gestión de documentos. Las Intranets pueden incluir sistemas de seguridad para la red, tablones de anuncios y motores de búsqueda.

- ***Localización mediante el nombre de dominio.***

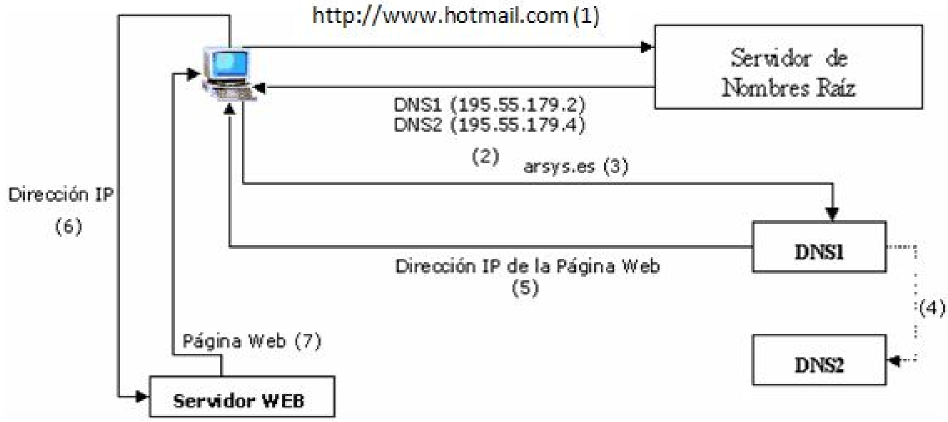
  Mas fácil de usar que la dirección IP de un determinado ordenador. El nombre de dominio está formado por el nombre del servidor, diversos nombres de subdominio y el nombre del dominio genérico de primer nivel.

www .	aularagon	. org
servicio	dominio	dominio genérico primer nivel

3.2.3. Servicios de nombre de dominio

Ya se ha comentado anteriormente que cada ordenador en Internet tienen asociada una dirección única, llamada dirección IP, y que esta nos permite diferenciar a un ordenador de otro en la red. Si queremos visitar una determinada Web, deberemos conocer la dirección IP del ordenador que la contiene, lo cual podemos imaginar no es nada conveniente y resulta realmente incómodo. La solución, mucho más cómoda, será escribir el nombre de dominio, mucho más fácil de recordar, por ejemplo, *www.hotmal.com*, de tal forma que el sistema conecta con un servidor DNS, es decir, un servidor de nombres de dominio que realiza la traducción de nombre de dominio a dirección IP en Internet.

Por tanto, nosotros los usuarios trabajamos con nombres de dominio, mientras que internamente, en Internet, se está empleando, una vez traducidos por el DNS, direcciones IP.



3.2.4. Protocolo TCP/IP

El factor esencial que posibilita la existencia de Internet es la estandarización de un conjunto de códigos, protocolos, que permiten la conexión y comunicación entre sí de ordenadores con independencia del sistema operativo que utilicen, el tipo de red al que estén conectados o el medio de conexión que empleen cada uno.

El protocolo **TCP/IP** es el protocolo de red empleado en Internet.

Este protocolo está formado por un conjunto de normas que deben cumplir todos los ordenadores conectados a Internet y que permite una comunicación fiable entre los mismos. Consta de dos protocolos básicos:

- ***Protocolo TCP*** (Transfer Control Protocol), que permite una transmisión fiable y bidireccional.
- ***Protocolo IP*** (Internet Protocol), que envía los datos tanto a nivel local como a través de redes.

3.3. Navegación

3.3.1. Concepto. Navegador

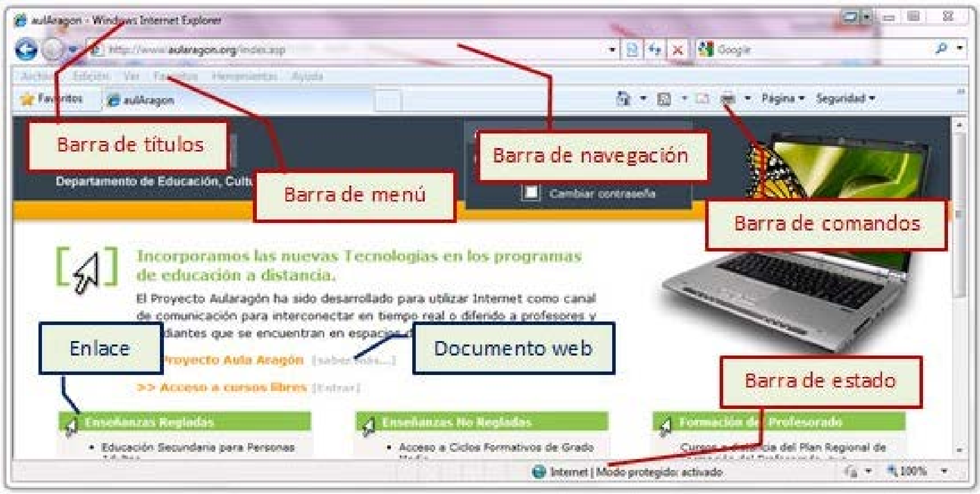
El concepto de navegación sugiere navegar por un mar, de información en nuestro caso, que sería Internet. Internet es un inmenso mar de información en forma de libros, texto, imágenes, videos, música, etc. Toda esta información esta almacenada en páginas web desde las cuales tenemos acceso a contenidos generalmente multimedia y desde las cuales podemos generalmente acceder a otros contenidos en otras páginas web.

Una **página web** no es más que un conjunto de código, concretamente **HTML** (HyperText Markup Language) escrito en forma plana que contiene todo el contenido visible de la página, o las vías para descargar o acceder a otros contenidos relacionados.

Para navegar necesitamos un bote, y en este caso el bote sería el navegador Web, o browser en Ingles. Un navegador es un intérprete de código HTML, de forma que permite visualizarlo correctamente. Los navegadores, es decir internautas, no requieren conocer de este código, todo es interpretado por el navegador.

Existen un gran número de navegadores, cada uno con sus características propias e interfaz de usuario. De entre los más populares tenemos:

- KHTML (desarrollado por KDE): Konqueror, Safari, Google Chrome, etc.
- **Internet Explorer** y derivados (desarrollado por Microsoft): Avant Browser, AOL, etc.
- Mozilla y derivados (desarrollado para WWW): **Mozilla Firefox**, Galeon, etc.



3.3.2. Localización de un documento

Para localizar un documento tendremos que comunicar al navegador su ubicación exacta, conocida como dirección URL (Uniform Resource Locator), que consta de la siguiente información:

- El **protocolo** que ha de utilizar el navegador para comunicarse con el servidor web que contiene la página web buscada. Generalmente se emplea HTTP (HyperText Transfert Protocol).
- El **servicio** que queremos de internet (www para la consulta de páginas web).
- El **nombre de dominio**, que se trata del nombre del servidor más el de dominio genérico de primer nivel asociado.
- La **ruta** completa para llegar al archivo que deseamos obtener dentro del conjunto de directorios del servidor.

Ejemplos

Supongamos que queremos acceder a la sección de deportes del periódico el Mundo, para ello deberemos insertar en la parte destinada a la URL del navegador en cuestión la siguiente información: **http://www.elmundo.es/elmundodeporte/index.html**

Para acceder a la página del INSTITUTO DE Tecnologías Educativas del Ministerio de Educación la ruta será: **http://www.ite.educacion.es**

3.4. Buscadores

3.4.1. Necesidad de buscadores

Uno de los usos más típicos de Internet es la búsqueda de información, un viaje, un vuelo, el precio de un artículo, etc. Para realizar esta búsqueda empleamos unas páginas web especiales, llamadas **buscadores**, que permiten consultar una base de datos donde se relaciona direcciones de páginas Web con el contenido de las mismas.

Existen distintos tipos de buscadores en función del modo de construcción y la manera de acceder a su base de datos, pero el resultado final, en todos ellos, es siempre el mismo, un listado de direcciones de páginas web más o menos relacionadas con el tema buscado

El origen de los buscadores se remonta a abril de 1994 donde un grupo de amigos construyen una página web que ofrece a estudiantes páginas interesantes clasificadas por temas, dando origen a Yahoo.

Ejemplos de buscadores:

http://www.google.es http://es.yahoo.com http://www.lycos.es http://es.altavista.com

Para realizar una búsqueda sobre un tema determinado, lo único que debemos hacer es escribir una referencia, al tema, en el espacio reservado para ello en la aplicación Web correspondiente:

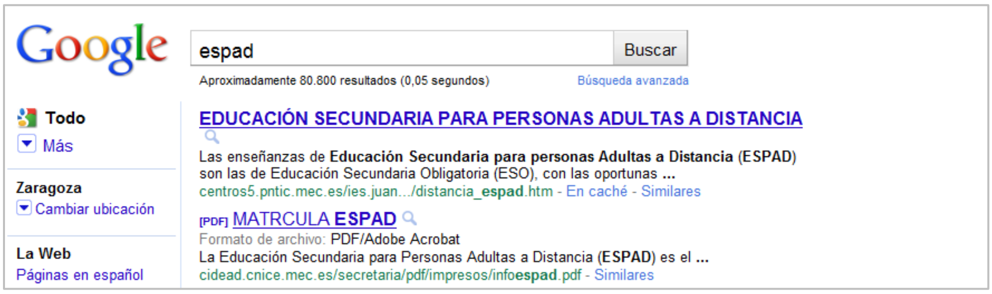
3.4.2. Tipos de buscadores

Se clasifican en tres tipos según la forma de obtener las direcciones que almacenan en su base de datos:

- ***Índice de búsqueda***, donde la base de datos con las direcciones es construida por un equipo humano. Las páginas se clasifican por categorías o temas y subcategorias en relación a su contenido. El acceso a la base de datos se hace por categorías.
- ***Motor de búsqueda***, donde el rastreo de la red lo hace un programa llamado motor que relaciona la dirección de una página con un número determinado de palabras que aparecen en la página. El acceso a la base de datos se hace por palabra clave.
- ***Metabuscadores***, que no poseen una base de datos propias detrás, sino que utilizan varias bases de datos de otros buscadores para presentarnos los resultados.

Dependiendo de lo que busquemos en Internet, deberemos emplear uno u otro tipo de buscador, parte esencial en el éxito del proceso.

Observa los diferentes resultados para "espad" en tres buscadores diferentes:



Completa el texto

Cada ordenador conectado a Internet tiene una dirección [Seleccione un valor] única. Esta dirección está formada por [Seleccione un valor] grupos de números separados por [Seleccione un valor] y cada uno de estos grupos puede tomar valores entre 0 y [Seleccione un valor]

Verdadero o falso

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones sobre los elementos constituyentes de los nombres de dominio en una Red.

	Verdadero	Falso
Un nombre de subdominio y un nombre de dominio genérico de primer nivel.	○	○
Nombre de servicio, un nombre de subdominio y varios nombres de dominio genérico.	○	○
Nombre de servicio, varios nombres de subdominio y varios nombres de dominio genérico.	○	○
Nombre de servicio, varios nombres de subdominio y un nombre de dominio genérico.	○	○

Completa el texto

Una página Web no es más que un conjunto de [Seleccione un valor], concretamente [Seleccione un valor], escrito en forma [Seleccione un valor] que contiene todo el contenido [Seleccione un valor] de la página o las vías para [Seleccione un valor] otros contenidos relacionados.

Relaciona

Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con los de la derecha.

Formato dirección	HTML
Servio Internet	TCP/IP
Lenguaje creación Webs	WWW
Protocolo red	URL

Verdadero o falso

De los siguientes grupos de aplicaciones, indica cuáles de ellos hacen referencia únicamente a navegadores de Internet.

	Verdadero	Falso
Mozilla, Chrome y DreamWeaver.	○	○
Chrome, Safari y WordPad.	○	○
Mozilla, IE, y Vimacs.	○	○
Mozilla, Safari y Galeon.	○	○

4. Correo Electrónico.

El **correo electrónico** también conocido como **e-mail** (electronic mail) , es la herramienta más antigua y a la vez una de las más útiles de Internet. Permite enviar y recibir mensajes a cualquier usuario de Internet en el mundo. Dichos mensajes consisten en la transferencia de información (texto, imágenes, sonido, etc.), es decir, de ficheros electrónicos de diversos tipos, entre dos ordenadores.

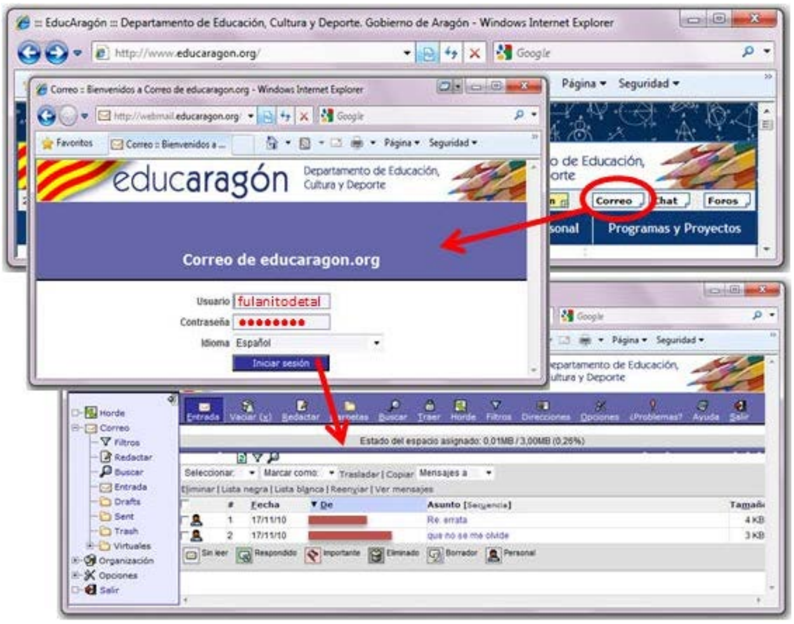
Su uso se ha extendido enormemente en los últimos años, y actualmente es difícil encontrar una empresa o usuario de Internet que no posea su propia dirección de correo electrónico. Las prestaciones del correo electrónico son inmensas: mandar un mismo mensaje a tantas personas como queramos, con independencia de donde vivan, sin separarnos del ordenador, y con la posibilidad de añadir (archivos adjuntos) al mensaje archivos de textos, imágenes, programas, etc.

El nombre **correo electrónico** proviene de la analogía con el correo postal: ambos sirven para enviar y recibir mensajes, y se utilizan "buzones" intermedios (servidores), donde los mensajes se guardan temporalmente antes de dirigirse a su destino, y antes de que el destinatario los revise.

4.1. Tipos de correo electrónico.

Existen dos tipos de correo electrónico:

- **Correo POP**. Se realiza a través de una conexión a Internet, pero sin necesidad de estar permanentemente conectado a la red. Por medio de programas específicos (OUTLOOK EXPRESS) y convenientemente configurados se accede a un servidor dedicado de correo para recoger o enviar los mensajes que estén en nuestro buzón, cortando la comunicación con el servidor posteriormente. Los mensajes del servidor de correo se borran, por lo que tenemos capacidad ilimitada de almacenaje de correos en el mismo, el sistema es muy rápido y no requiere de estar conectado para consultar el contenido del correo. Como desventaja, indicar que es complicado enviar o recibir mensajes desde otro ordenador que no sea el nuestro y es más difícil combatir el SPAM.
- **Correo Web o Web Mail**. Servicio de correo gratuito que se encuentra en portales dedicados (HOTMAIL, GMAIL, ...) donde el usuario se inscribe y se le asocia una casilla de correo personal. Para leer o escribir se requiere estar permanentemente conectado. Es más lento que el tipo de correo anterior. La capacidad de e-mails que se pueden almacenar está limitada, pero podemos acceder a nuestro correo desde cualquier ordenador y es más fácil de combatir el SPAM.



más...

Dirección de correo

Una dirección de correo electrónico es un conjunto de palabras que identifican a una persona que puede enviar y recibir correo. Cada dirección es única y pertenece siempre a la misma persona.

Su estructura es:

persona@servicio.com.

El signo **@** siempre está en cada dirección de correo electrónico, y la divide en dos partes: el **nombre de usuario** y el **dominio** en el que está, que coincide con el proveedor que da el correo, y que por tanto es algo que el usuario no puede cambiar.

SPAM

Se llama spam, correo basura o sms basura a los mensajes no solicitados, no deseados o de remitente desconocido, de tipo publicitario habitualmente, enviados en grandes cantidades (incluso masivas) que perjudican de alguna o varias maneras al receptor. La acción de enviar dichos mensajes se denomina spamming.

Aunque se puede hacer por distintas vías, la más utilizada entre el público en general es la que se basa en el correo electrónico.

La palabra **spam** tiene, como punto de partida, loa anuncios publicitarios donde el grupo británico Monty Phyton realizaba la burla a la carne en lata llamada *Hornel´s Spiced Ham*, comercializada por la empresa charcutera Hornel Foods en 1937, como alimento para los soldados soviéticos y británicos en la Segunda Guerra Mundial.

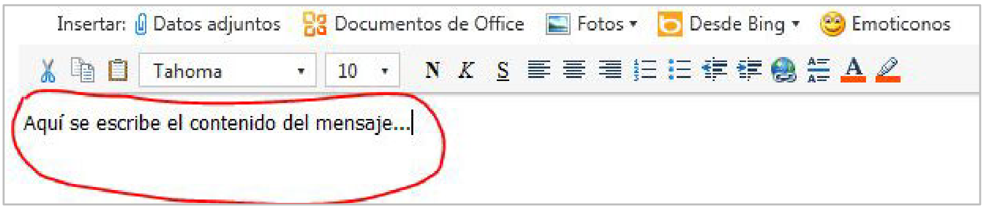
4.2. Estructura de un mensaje de correo electrónico

La estructura es muy parecida a la de una carta de correo tradicional. Podemos diferenciar dos partes fundamentales, la cabecera y el cuerpo del mensaje:

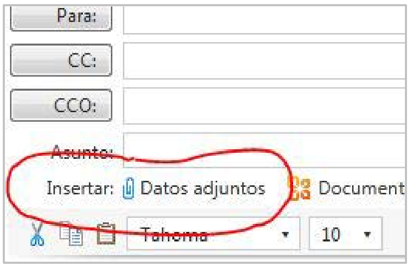
- **La cabecera**, actúa de matasellos electrónico, de tal manera que el receptor del mensaje a través de la información de la cabecera, puede conocer quien le envió el mensaje, como fue enviado y cuando.

- ***DE (FROM)***: Nombre o dirección de la persona que envía el correo.
- ***A (TO)***: Nombre o dirección de la persona a la que se envía el correo. Puede ser a varias.
- ***Cc***: Nombre o dirección del destinatario de una copia del mensaje.
- ***Cco***: Nombre o dirección del destinatario, pueden ser varios, de una copia del mensaje sin que los demás remitentes sepan que la reciben.
- ***Asunto***: Tema o asunto del mensaje.

El cuerpo, del mensaje donde se escribe el contenido del mismo, pudiendo ser, según el programa, únicamente texto, o texto con formato.



Podemos incluso enviar un mensaje con información adjunta en forma de archivo. Para ello, solo tenemos que seleccionar la opción correspondiente para adjuntar archivos y realizar la búsqueda de este archivo en nuestro sistema.



4.3. Funcionamiento del correo electrónico. Protocolos.

Para recibir un correo electrónico una persona debe tener un buzón electrónico, que no es más que un área de almacenamiento en disco, donde se guardan los mensajes que llegan hasta que el usuario los lee. Al igual que el buzón postal, el e-mail debe tener una dirección inequívoca, y que el remitente debe conocer antes de mandar el correo correspondiente.

Será necesario, también, un software de correo electrónico, que actúe armónicamente en el ordenador del remitente, del receptor y en cada nodo intermedio (servidores de correo) de la red por donde pasa el correo.

Para enviar el mensaje, el remitente deberá usar también una aplicación específica para este caso, que le permitirá redactar y editar el correo, dar la dirección del destinatario y las características especiales que el mensaje pudiera tener. Una vez terminado el mensaje, el software lo podrá mandar al buzón del destinatario.

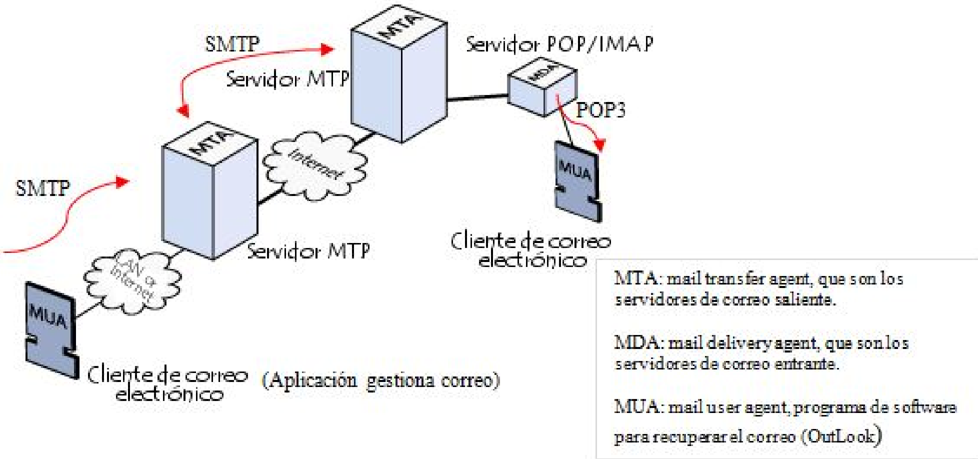
más...

Protocolos de correo

Los protocolos empleados en el proceso de envío y recepción de correo son:

- **SMTP (Simple Mail Transfer Protocol)**, que se emplea para enviar el correo del remitente a los nodos intermedios de la red (servidor de correo).
- **POP3 (Post Office Protocol)**, diseñado para recibir correo, no para enviarlo; le permite a los usuarios descargar su correo electrónico mientras están conectados y revisarlo después, incluso estando sin conexión. Cabe mencionar que la mayoría de los clientes de correo incluyen la opción de dejar los mensajes en el servidor, de manera tal que, un cliente que utilice POP3 se conecta, obtiene todos los mensajes, los almacena en la computadora del usuario como mensajes nuevos, los elimina del servidor y finalmente se desconecta.

Normalmente cuando un mensaje llega al destinatario, este es informado por el sistema de tal hecho. Otra opción es revisar el correo frecuentemente. El destinatario empleará una aplicación software equivalente a la usada por el remitente para leer el mensaje y posteriormente poder responderlo u otro tipo de acción (borrarlo, guárdalo, etc.).



Verdadero o falso

De entre las siguientes afirmaciones relacionadas con el correo electrónico, señala cuales son correctas y cuáles no.

	Verdadero	Falso
POP3 y TCP son protocolo de correo electronico.		
El correo POP es un tipo de correo electronico.		
Correo Web es mas complicado de configur que cualquier otro tipo de correo.		
El correo electronico forma parte de los servicios que ofrece Internet.		

Elige la correcta

Elige la afirmación correcta sobre el significado de la sigla SPAM.

Son las siglas de un servivio de Internet.	
Son las siglas de un protocolo empleado en Internet.	
Son las siglas de una organizacion dedicada a Internet.	
Son las siglas de un tipo de correo electronico	

Completa el texto

POP3 está diseñado para [Seleccione un valor] correo, no para [Seleccione un valor] ; le permite al usuario [Seleccione un valor] su correo mientras [Seleccione un valor] conexión y revisarlo posteriormente.

Ejercicios

1. *Indica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:*

a) El número binario 1100011 es en decimal 99.

b) El número decimal 50 es en binario 110010.

c) El numero binario 11110010 es en decimal 244.

d) El numero decimal 125 es en binario 1111101.

2. *Elige la afirmación o afirmaciones que consideres correctas:*

a) La arquitectura de Von Neumann se basa en el concepto de memoria virtual.

b) En los equipos multiprocesador que funcionan en modo paralelo, cada procesador tiene una memoria independiente.

c) La arquitectura de ordenadores permite trabajar por bloques dependientes unos de otros.

d) La arquitectura de Von Neumann define 4 componentes fundamentales: el procesador, la memoria, los interfaces de entrada y salida y los buses.

3. *Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con los de la derecha:*

Mother Board	Periféricos conectan a puertos
CPU	Memoria Permanente
RAM	Circuito Integrado conectan restantes componentes
E/S	Memoria transitoria
HD	"Cerebro" del ordenador

4. *De las siguientes tareas, ¿Cuál opinas que no depende del Sistema Operativo?*

a) Imprimir un documento

b) Almacenamiento de un archivo.

c) Configuración de la BIOS.

d) Grabación de un CD.

5. *Relaciona los siguientes conceptos:*

S.O. en modo texto.	Linux
S.O. con interfaz gráfica.	Unix
S.O. distribuido.	Red Hat Enterprise
S.O. multiprocesador	Windows Server 2008

6. *Si queremos insertar, de la forma más rápida posible, la fecha en una carta empleando la aplicación WordPad, ¿Cuál sería la acción más adecuada?*

a) Escribirla manualmente.

b) Ir a la barra de menús y en la opción insertar pulsar sobre Fecha y Hora.

c) Acceder a la barra estándar y pulsar sobre el icono correspondiente.

d) Ninguna de las anteriores.

7. *Si queremos ser más eficaces gestionando acciones repetitivas en un procesador de textos, la acción más adecuada sería:*
   - a) *Usar índices.*
   - b) *Usar Copiar/Pegar.*
   - c) *Usar Subdocumentos.*
   - d) *Usar Macros.*

8. *Relaciona los elementos de las dos columnas:*

ISP	Traducción direcciones
DNS	Envío datos nivel local
IP	Transporte fiable datos
TCP	Telefónica, Wanadoo

9. *Identifica las partes indicadas de diferente color*

***http**:// www. Microsoft. com*

10. *¿Qué se entiende por Intranet?*
    - a) *Internet externa a una organización.*
    - b) *Red interna de una organización basada en unos estándares propios.*
    - c) *Red interna a una organización basada en estándares de Internet.*
    - d) *Red externa de una organización basada en estándares de Internet.*

11. *Relaciona los siguientes conceptos:*

HTML	4 grupos números
URL	Almacenamiento
HD	Dirección
Dirección IP	Lenguaje programación

12. *Relaciona los conceptos:*

FTP	Dirección
URL	Con configuración
Correo Web	Sin configuración
Correo Pop	Transferencia ficheros

Matemáticas y Tecnología 1º

Geometría plana

6

"Que nadie entre aquí que no sepa Geometría" decía en la puerta de la Academia de Atenas (escuela filosófica fundada por Platón en siglo IV antes de nuestra era). La palabra geometría procede del griego (Geo: Tierra y metron: medida), significa pues "medida de la Tierra", y puede ser considerada como la ciencia más antigua. Desde el principio de los tiempos el ser humano ha representado la realidad que le rodeaba dibujando los objetos y figuras que veía, y la necesidad de medir los campos tras cada inundación del Nilo llevó al nacimiento y desarrollo de esta parte de las Matemáticas.

En esta unidad vas a comenzar el estudio de la Geometría plana. Empezarás por ver los principales elementos del plano, puntos, rectas, segmentos y ángulos. A continuación estudiarás las propiedades de las principales figuras planas: polígonos y circunferencias; para terminar con problemas de medida en los que calcularás perímetros y áreas de polígonos y figuras circulares.

Una vez estudiada la unidad debes ser capaz de:

- *Conocer los elementos fundamentales del plano: puntos, rectas, ángulos.*
- *Conocer los diferentes tipos de ángulos y las propiedades y relaciones entre ángulos.*
- *Medir y realizar operaciones básicas con ángulos.*
- *Reconocer, representar e identificar los elementos geométricos que caracterizan a diferentes polígonos*
- *Reconocer y dibujar diferentes tipos de polígonos: triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.*
- *Manejar las unidades de medida de superficies.*
- *Calcular perímetros y áreas de diferentes polígonos.*
- *Identificar los diferentes elementos presentes en la circunferencia y el círculo.*
- *Medir longitudes y áreas de figuras circulares.*

1. Puntos, rectas, ángulos

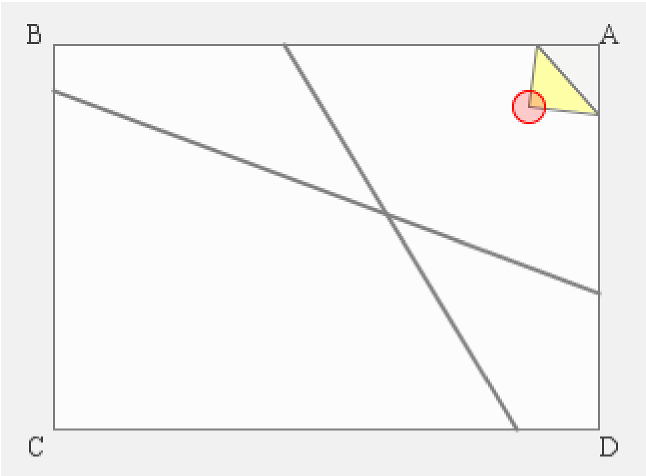
El plano, puntos y rectas

A nuestro alrededor nos encontramos a menudo con superficies "planas": el tablero de una mesa, una pared, el suelo, la pantalla del ordenador... Imagina una hoja de papel que se extendiera en todas las direcciones hasta el infinito y tan fina que se pudiera considerar 0 su grosor, ésta es la representación de un plano.

Y en el plano dos elementos fundamentales: el punto y la recta.

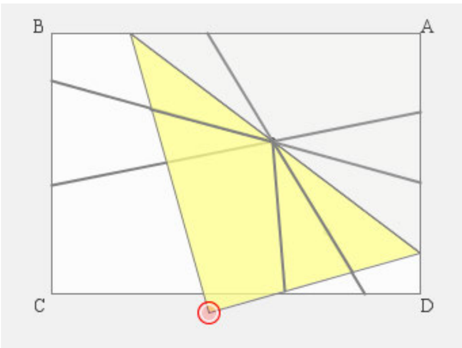
- El **punto** no tiene longitud ni anchura.
- La **recta** tiene longitud pero no anchura.

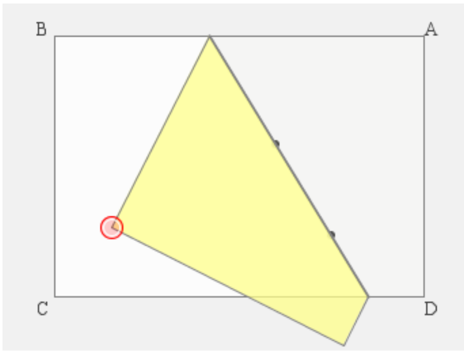
Podemos simular un plano con una hoja de papel. Dobla la hoja por la esquina que desees, la marca que queda al desdoblarla es la representación de una recta que al igual que el plano no tiene límites. Dóblala de nuevo por un sitio diferente, el lugar donde se cortan las dos dobleces es la representación de un punto.



- Una recta divide al plano en dos partes, cada una de esas regiones es un **semiplano**.

1.1. Rectas, semirrectas, segmentos





- Marca un punto en la hoja, a continuación dóblala desde la esquina que desees, de manera que la doblez pase por ese punto que has marcado, ¿cuántas rectas puedes dibujar de esta manera?, comprueba que todas las que quieras. *Por un punto del plano pasan infinitas rectas.*
- Marca dos puntos en la hoja y dóblala de forma que la doblez pase por los dos puntos que has marcado, ¿cuántas rectas puedes dibujar ahora?, sólo una. *Por dos puntos del plano pasa una recta y solo una.*

más...

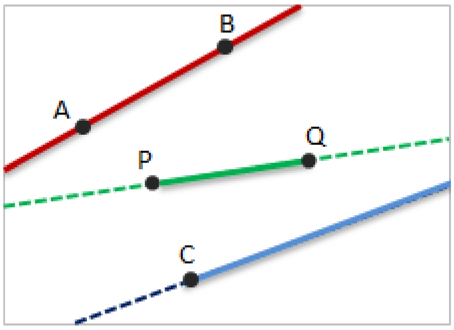
Euclides

Euclides fue un matemático y geómetra griego que vivió sobre el año 300 antes de nuestra era.

Poco conocemos de su vida, pero hasta nosotros ha llegado su gran obra, el primer gran compendio del saber matemático de su tiempo. Conocida como *"Elementos de Geometría"* es un conjunto de cinco libros en los que a partir de cinco postulados construye toda la geometría que sigue vigente hoy en día.

Seguramente ninguna de las demostraciones que aporta las hizo él por vez primera, pero la tarea de recopilación y formalización sin duda se la debemos a él.

- Dos puntos A y B determinan una **recta** que es ilimitada.
- Un punto C de una recta determina dos **semirrectas**, que son ilimitadas.
- Dos puntos P y Q de una recta determinan un **segmento** de extremos P y Q. El segmento es limitado, se puede medir su longitud.



Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Si trazamos dos rectas en un plano puede ocurrir que se corten o que no lleguen a tocarse nunca. Si se cortan diremos que son **secantes** y no se cortan son **paralelas**.

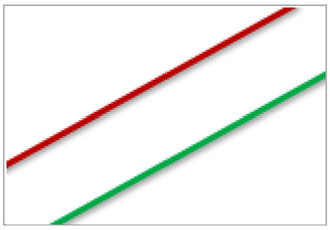
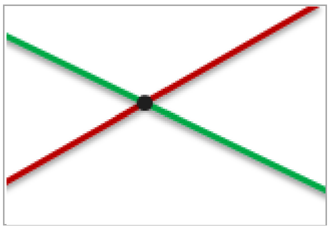
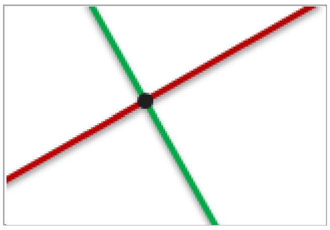
- Dos rectas son **paralelas** si no se cortan en ningún punto.
- Dos rectas son **secantes** si se cortan en un punto.


Fotografía de J.M. Sorando Muzás en "Matemáticas en tu mundo"

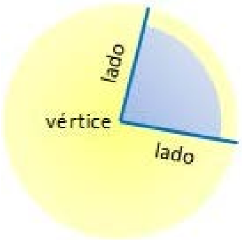
Observa que dos rectas si se cortan sólo pueden hacerlo en un punto ya que si tuviesen dos puntos en común serían **coincidentes**, es decir la misma recta.

Dos rectas secantes dividen al plano en cuatro regiones, si estas cuatro regiones tienen la misma amplitud se dice que las rectas son **perpendiculares**.

- Dos rectas son **perpendiculares** si dividen al plano en cuatro regiones de igual amplitud.

<table>
<tr><th>PARALELAS</th><th>SECANTES</th><th>PERPENDICULARES</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>No se cortan</td><td colspan="2">Se cortan en un punto</td></tr>
</table>

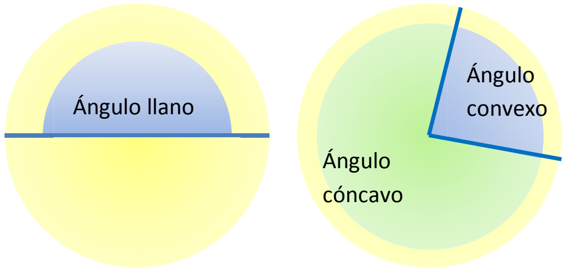
1.2. Ángulos



Dos semirrectas con un origen común determinan dos regiones en el plano, cada una de ellas es un ángulo.

- Un **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas son los **lados** del ángulo y el punto origen es el **vértice**.

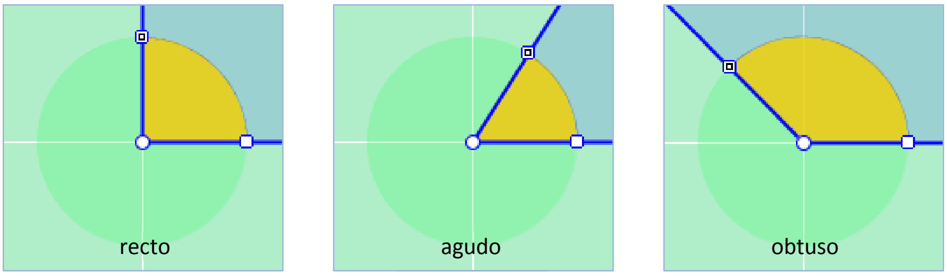
Clasificación de los ángulos



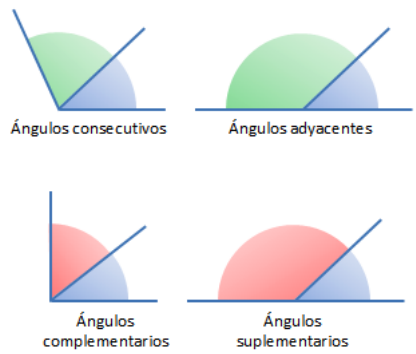
Cuando los dos lados están sobre la misma recta el ángulo se dice **llano**. Los ángulos que son mayores que un llano son **cóncavos** y los que son menores son **convexos**.

Un **ángulo convexo** puede ser:

- **Recto**, si los lados están sobre rectas perpendiculares.
- **Agudo**, si es menor que un recto.
- **Obtuso**, si es mayor que un recto.

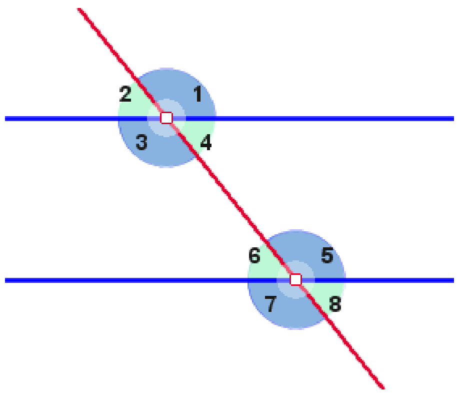


Relaciones entre ángulos



- Dos ángulos son **consecutivos** cuando tienen el vértice y un lado común, y uno no está contenido en el otro.
- Dos ángulos son **adyacentes** si son consecutivos y además los lados no comunes están sobre la misma recta.
- Dos ángulos consecutivos son **complementarios** si entre los dos forman un ángulo recto, y **suplementarios** si entre los dos forman un ángulo llano.

Fíjate ahora en este par de rectas paralelas, al cortarlas por otra recta se forman ocho ángulos convexos que podemos emparejar.



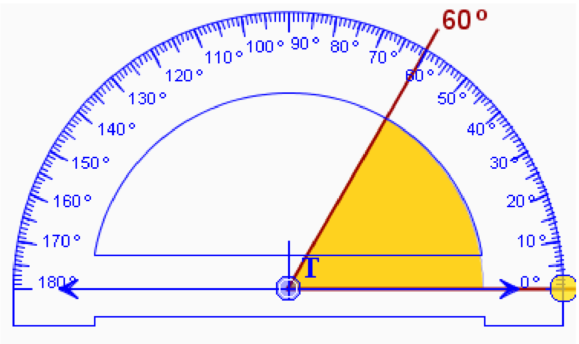
- Las parejas 1 y 3, 2 y 4, 5 y 7, 6 y 8, son ángulos **opuestos por el vértice**.
- Las parejas 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8 son ángulos **correspondientes**.
- Las parejas 4 y 6, 3 y 5 son ángulos **alternos internos**.
- Las parejas 2 y 8, 1 y 7 son ángulos **alternos externos**.

En cada una de estas parejas los dos ángulos son iguales.

Medida de ángulos

Igual que para medir longitudes utilizamos el metro, y para medir capacidades el litro, para medir ángulos utilizaremos un ángulo como unidad de medida. La unidad principal (no es la única) de medida de ángulos es el **grado sexagesimal**.

Un **grado sexagesimal** es el ángulo que resulta de dividir un ángulo recto en **90** partes iguales. Se representa **1º.**



Así un **ángulo recto** mide **90º** y un **ángulo llano**, que son dos rectos, mide **180º**.

El instrumento que se emplea para medir ángulos es el **semicírculo graduado o transportador**.

El sistema sexagesimal

Los submúltiplos del grado son el **minuto**, (´), y el **segundo**, (´´). Cada grado tiene 60 minutos y cada minuto tiene 60 segundos.

Para pasar de una unidad a otra de orden inferior se multiplica por 60, y para pasar a una de orden superior se divide por 60.

Ejemplos:

$12^\circ = 12 \cdot 60 = 720' = 720 \cdot 60 = 43200''$	$1440'' = 1440 : 60 = 240' = 240 : 60 = 4^\circ$

La medida de un ángulo puede darse usando una sóla unidad, 23,495º, o de forma "compleja", esto es empleando dos o las tres unidades, como por ejemplo 23º 29´ 42´´. Para pasar de una forma a la otra se hace de la forma siguiente:

- **De compleja a incompleja**

  Se pasan los grados, minutos o segundos a la unidad elegida y se suman los resultados.

Ejemplos:

- Escribir en segundos: $23^\circ\ 29'\ 42'' = 82800'' + 1740'' + 42'' = 84582''$

  $23^\circ = 23 \cdot 60 \cdot 60 = 82800''$ $\quad 29' = 29 \cdot 60 = 1740''$
- Escribir en grados: $23^\circ\ 29'\ 42'' = 23{,}495^\circ$

  $42'' : 60 = 0{,}7'$ $\quad 29{,}7' : 60 = 0{,}495^\circ$

- **De incompleja a compleja**

  Si son minutos o segundos se dividen para 60, el cociente entero son las unidades de orden superior y el resto las unidades de partida.

  Si se trata de un número con decimales, se multiplica la parte decimal por 60 para calcular las unidades de orden inferior.

Ejemplos:

- $84582'' = 23^\circ\ 29'\ 42''$

  $84582 : 60 = 1409'$ RESTO $= 42''$

  $1409 : 60 = 23^\circ$ RESTO $= 29'$
- $23{,}495^\circ = 23^\circ\ 29'\ 42''$

  $0{,}495^\circ = 0{,}495 \cdot 60 = 29{,}7'$

  $0{,}7' = 0{,}7 \cdot 60 = 42''$

más...

El grado sexagesimal

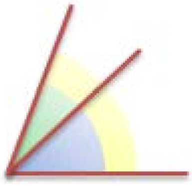
Los ángulos y el tiempo los medimos en el sistema sexagesimal y hasta damos los mismos nombres a los submúltiplos, minutos y segundos. ¿Casualidad?, no, tanto la medida del tiempo como la de los ángulos la hemos heredado de la antigua Babilonia, donde allá por el tercer milenio antes de nuestra era desarrollaron este sistema.

Los babilonios utilizaban el sistema de numeración sexagesimal, o sea en base 60, y fueron ellos, grandes astrólogos, los que dividieron el círculo zodiacal, que marca el recorrido del sol en un año, en 12 sectores y cada sector en 30 partes, con lo que el círculo quedaba dividido en 12·30=360 "grados", a su vez cada grado lo dividieron en 60 "minutos" y cada minuto en 60 "segundos".

Operaciones con ángulos

Suma de ángulos

Para sumar dos ángulos gráficamente, se colocan consecutivos y el ángulo resultante es la suma.



	45º	35´	37´´
+	23º	38´	46´´
	68º	73´	83´´
		+1	– 60
	68º	74´	23´´
	+1	– 60	
	69º	**14´**	**23´´**

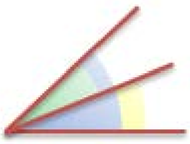
Si la suma de los minutos o los segundos es mayor que 60, se escriben en forma compleja y se distribuyen en la suma total.

83´´= 1´ 23´´

74´ = 1º 14´

Resta de ángulos

Para restar dos ángulos se colocan el ángulo sustraendo con un lado común al minuendo y hacia el interior.



1º=60´ 1´=60´´

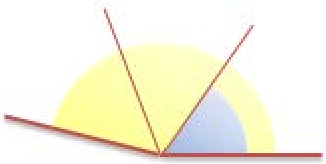
	45º	35´	37´´
–	23º	38´	46´´

	44º	94´	97´´
–	23º	38´	46´´
	21º	**56´**	**51´´**

Cuando en alguna unidad el minuendo es menor que el sustraendo se resta 1 a la inmediatamente superior y se añade 60 a dicha unidad del minuendo.

Producto por un número

El producto de un ángulo por 2, 3, 4,... es otro ángulo de amplitud doble, triple, cuádruple, etc.



55º	26´	42´´
		× 3
165º	78´	126´´
	+2	–120
165º	80´	6´´
+1	– 60	
166º	**20´**	**6´´**

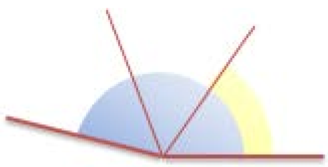
Si el producto de los minutos o los segundos es mayor que 60, se escriben en forma compleja y se distribuyen en el total.

126´´= 2´ 6´´

80´ = 1º 20´

Dividir un ángulo en partes iguales

El resultado de dividir un ángulo para 2, 3, 4,... es otro ángulo de amplitud la mitad, la tercera parte, etc.



166º 20´ 6´´ | 3

16

1×60=60´

80´

20

2×60=120´´

126´´

06

0

55º 26´ 42´´

Se dividen los grados para el número, se pasa el resto a minutos y se suma a la cantidad inicial. se dividen los minutos resultantes y se repite el proceso con los segundos.

Verdadero o falso

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

	Verdadero	Falso
A las diez en punto las agujas del reloj forman un ángulo de 60°	○	○
El ángulo suplementario de 56° 34' mide 33° 26'	○	○
La mitad del ángulo de 73° 26' 40" mide 36° 43' 20"	○	○
El ángulo que mide 11011' es cóncavo	○	○

Completa

23,5°	3° 9' 20"	58° 1' 8"
44° 37'	44926"	43926"
22° 30'	45° 58'	44° 57'

a) El ángulo 11360" en forma compleja es ________

b) 12° 12' 6" son ________ segundos

c) Al dividir un ángulo llano en 8 partes iguales cada parte mide ________

d) La suma de 25° 34' 16" y 32° 26' 52" es ________

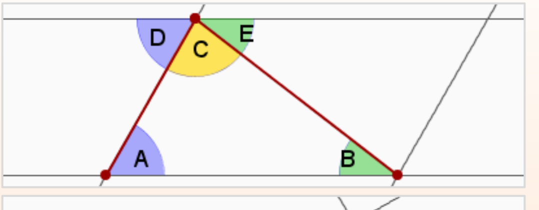
e) El ángulo complementario de 45° 23' mide ________

f) El ángulo ________ tiene doble amplitud que el que mide 22° 59'

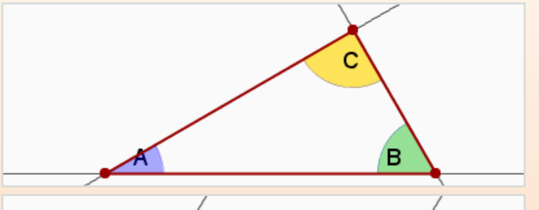
Practica

Con un semicírculo graduado mide los ángulos de las figuras y comprueba que:

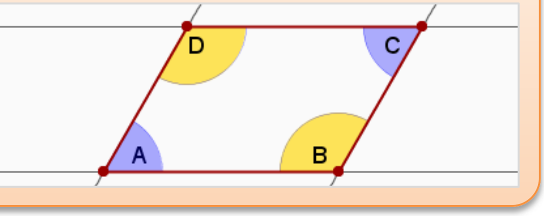
1) *Los ángulos del mismo color son iguales.*



2) *Los ángulos A y B son complementarios*

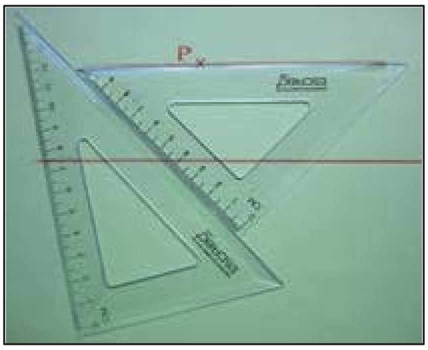


3) *Los ángulos del mismo color son iguales y los de distinto color son suplementarios.*



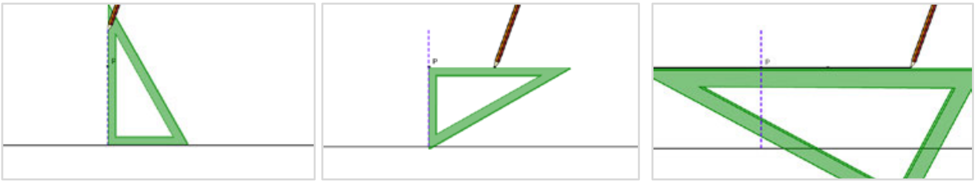
1.3. Dibujando puntos y rectas

Paralela a una recta por un punto

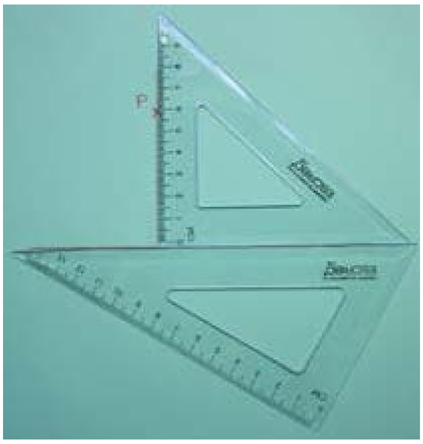


- Dada una recta, *r*, y un punto *P* exterior a ella, hay sólo una recta que pasando por *P* sea *paralela* a *r*.

En la imagen de la derecha puedes ver cómo se dibujan paralelas con la escuadra y el cartabón, y en la secuencia de debajo otra forma de trazarla.

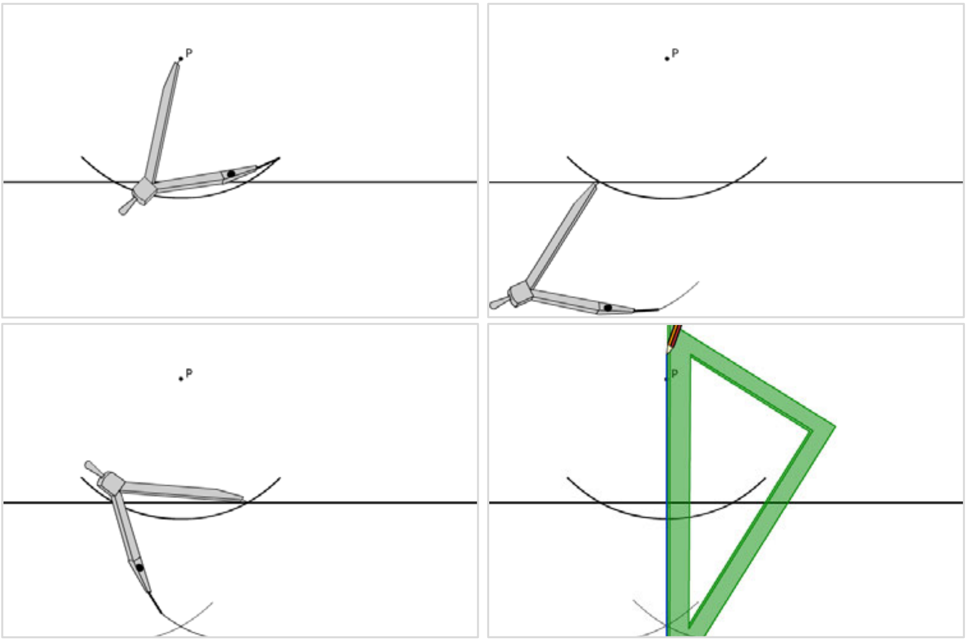


Perpendicular a una recta desde un punto



- Dada una recta, r, y un punto P exterior a ella, también hay sólo una recta que pasando por P sea *perpendicular* a r.

Fíjate en la imagen y en la secuencia posterior cómo se traza de dos maneras distintas.



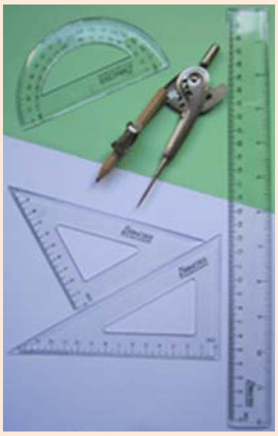
más…

Instrumentos de dibujo

► La **regla**, es uno de los más utilizados, sirve para medir segmentos y trazar líneas rectas.

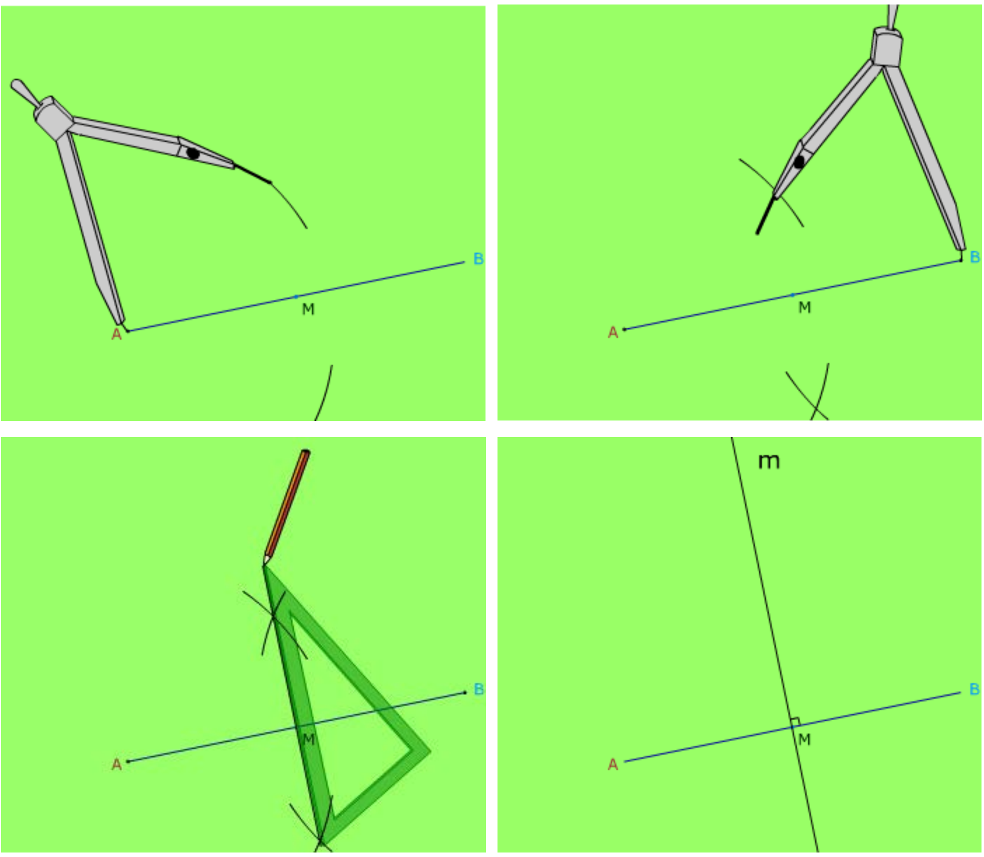
► La **escuadra** y el **cartabón**, se utilizan para trazar paralelas y perpendiculares, también para dibujar algunos ángulos.

► El **compás**, se emplea para trazar circunferencias y para transportar distancias iguales de un sitio a otro.

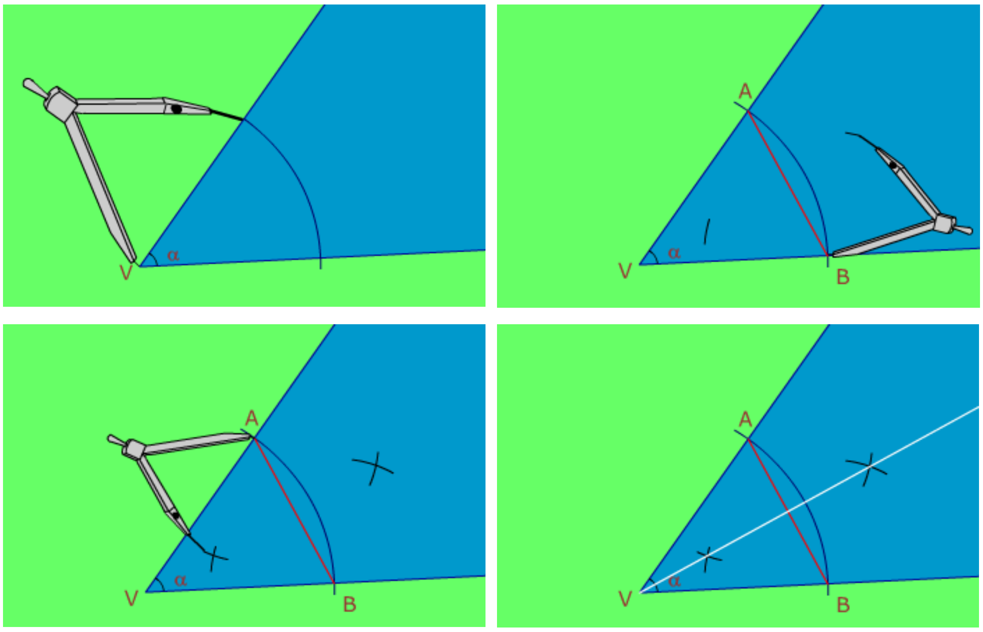


Mediatriz de un segmento

- La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular a éste por su **punto medio**. Se dibuja cómo puedes ver en la animación, fíjate que al dibujarla queda determinado también el punto medio del segmento.



- La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. Fíjate como se traza.



2. Polígonos

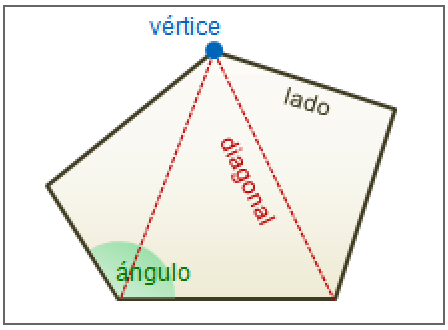
Una **línea poligonal** es una serie de segmentos unidos de forma que cada uno empieza donde acaba el anterior.

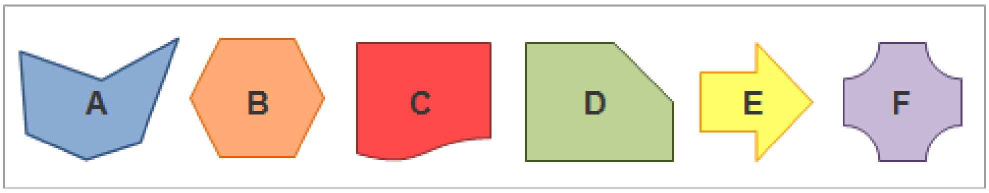
Una línea poligonal puede ser **abierta** o **cerrada**. Si es cerrada delimita un polígono.

> Se llama **polígono** a la porción del plano limitada por segmentos rectilíneos.

En todo polígono distinguimos:

- Los **lados**, cada uno de los segmentos que limitan el polígono.
- Los **vértices**, puntos en los que unen dos lados.
- Los **ángulos**, formados por dos lados contiguos del polígono.
  Consideraremos los ángulos interiores al polígono.
- Las **diagonales**, segmentos que unen dos lados no consecutivos de un polígono.





Elige las correctas

De las figuras planas de la imagen elige las que son polígonos.

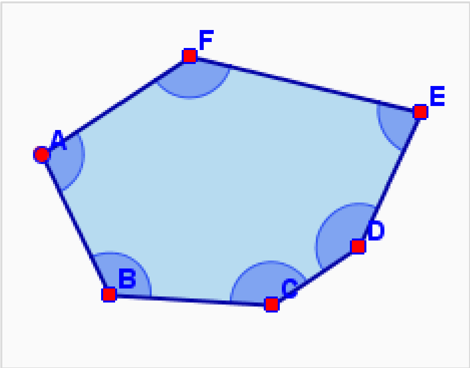
- D
- A
- E
- B
- C
- F

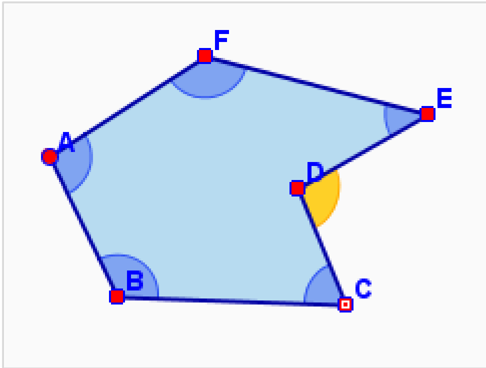
Clases de polígonos

Cóncavos y convexos

Un polígono se dice que es cóncavo si tiene algún ángulo cóncavo, es decir mayor de 180º. Es convexo si tiene todos sus ángulos convexos.

Un polígono convexo, mediante una línea recta, sólo se puede dividir en dos partes. Un polígono cóncavo se puede dividir mediante una línea recta en más de dos partes.





Según los lados

Para poder formar un polígono se necesitan por lo menos tres segmentos.

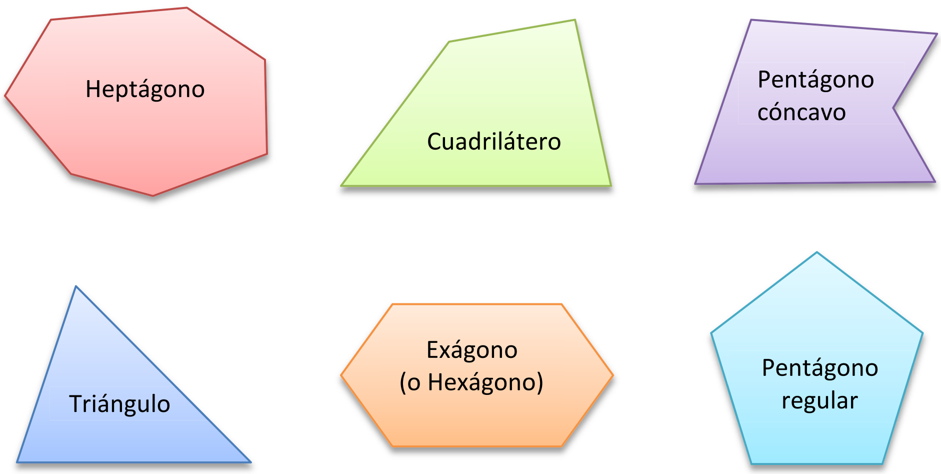
- Un polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos o de vértices.

Según el número de lados y de ángulos que tenga un polígono recibe distintos nombres, lo puedes ver en la tabla de la derecha. Los polígonos de más lados no tienen nombre especial, simplemente se les llama polígono de 17 lados, de 20 lados,...

Número de lados	Nombre
3	TRIÁNGULO
4	CUADRILÁTERO
5	PENTÁGONO
6	HEXÁGONO
7	HEPTÁGONO
8	OCTÓGONO
9	ENEÁGONO
10	DECÁGONO
11	ENDECÁGONO
12	DODECÁGONO

Polígonos regulares o irregulares

Un polígono es regular si tiene todos sus lados y sus ángulos iguales. Si sus lados o sus ángulos no son todos iguales es irregular.



más...

¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo?

Sea un polígono convexo de **n** lados. La diagonal une dos vértices no contiguos, por tanto desde cada vértice se podrán trazar **n-3** diagonales.

Como hay **n** vértices, el número total de diagonales es:

$n \cdot (n-3)/2$

Hay que dividir para 2, ya que es la misma diagonal la que va del vértice A al B que la que va del B al A.

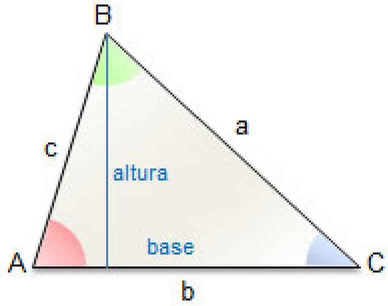
2.1. Triángulos

- Un triángulo es un polígono de tres lados.

Tres puntos A, B, C, no alineados determinan el triángulo ABC.

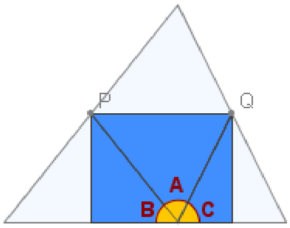
En el triángulo ABC se distinguen:

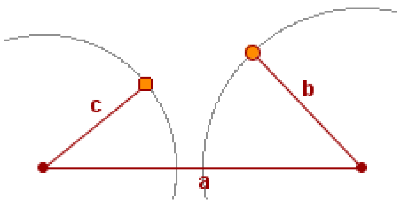
- Los tres **vértices** A, B y C.
- Los tres **ángulos** A, B y C.
- Los tres **lados** a, b y c.



El lado sobre el que se apoya el triángulo es la **base**, y la recta perpendicular a la base desde el vértice opuesto es la **altura**. Cada uno de los tres lados puede ser base del triángulo y a cada uno le corresponde una altura.

Dos **propiedades importantes** de los triángulos:



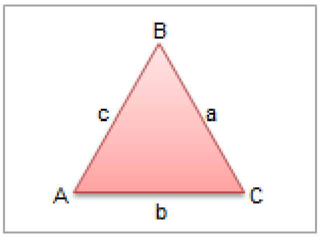
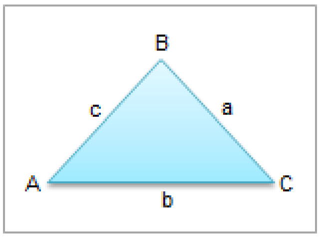
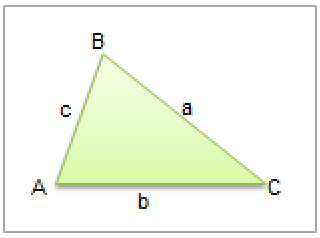


¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo?	¿Con tres segmentos cualesquiera siempre se puede formar un triángulo?
Recorta un triángulo de papel, dóblalo como indica la figura y comprobarás que los ángulos de un triángulo siempre suman **180º**.	En la figura puedes ver que **no siempre es posible**. En un triángulo la longitud de un lado debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

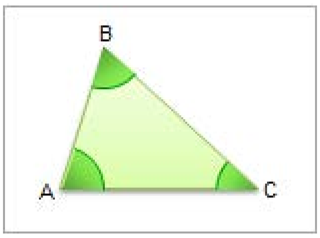
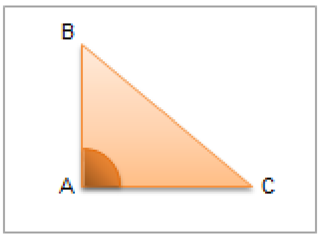
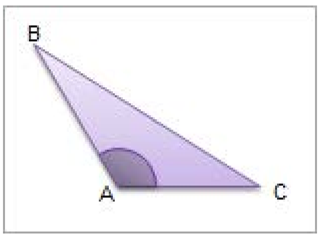
Clases de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar atendiendo a sus lados o atendiendo a sus ángulos.

- Atendiendo a sus **lados** pueden ser:

EQUILÁTEROS	ISÓSCELES	ESCALENOS
		
Los tres lados iguales	Dos lados iguales	Los tres lados desiguales

- Según sean sus **ángulos** pueden ser:

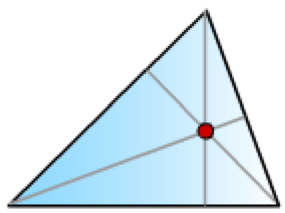
ACUTÁNGULOS	RECTÁNGULOS	OBTUSÁNGULOS
		
Los tres ángulos agudos	Un ángulo rectángulo	Un ángulo obtuso

Verdadero o falso

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

	Verdadero	Falso
Todo triángulo rectángulo es escaleno	○	○
Los lados de un triángulo miden 15 cm, 6 cm y 8 cm	○	○
En un triángulo isósceles y rectángulo los ángulos agudos miden 45º	○	○
Los ángulos de un triángulo miden 31º, 47º y 102º	○	○
En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden 35º, por tanto el triángulo es obtusángulo	○	○
Si se conocen los tres ángulos de un triángulo queda perfectamente determinado y lo podemos dibujar.	○	○

Rectas y puntos notables de un triángulo



Las alturas y el ortocentro

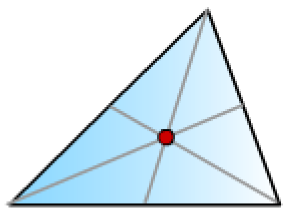
Las rectas que son perpendiculares por el vértice opuesto a cada uno de los lados, contienen las **alturas** del triángulo.

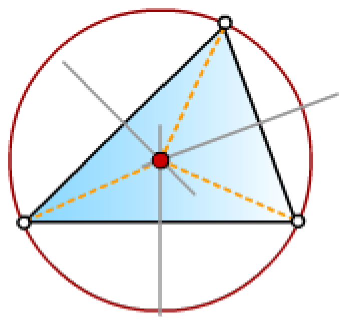
- Las tres alturas se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

Las medianas y el baricentro

Los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto son las **medianas** del triángulo.

- Las tres medianas se cortan en un punto llamado **baricentro**. El baricentro es el centro de gravedad del triángulo.





Las mediatrices y el circuncentro

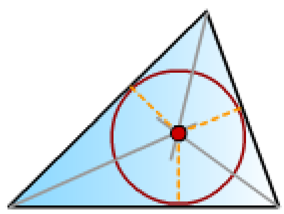
La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular por su punto medio. Si se trazan las mediatrices de cada uno de los lados también se cortan en un mismo punto.

- Las tres mediatrices se cortan en un punto llamado **circuncentro**. El circuncentro es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo, se llama circunferencia circunscrita.

Las bisectrices y el incentro

La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales. Las bisectrices de cada uno de los ángulos también se cortan en un punto.

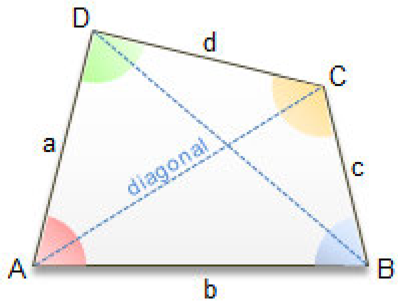
- Las tres bisectrices se cortan en un punto llamado **incentro**. El incentro es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados, se llama circunferencia inscrita.



2.2. Cuadriláteros

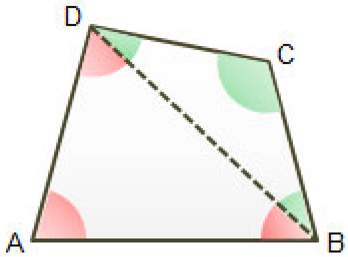
- Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Cuatro puntos del plano determinan un cuadrilátero siempre que tres de ellos no estén alineados.



En el cuadrilátero ABCD distinguimos:

- Los cuatro **vértices** A, B, C y D.
- Los cuatro **ángulos** A, B, C y D.
- Los cuatro **lados** a, b, c y d.
- Las dos **diagonales**, AC y BD.



¿Cuánto suman los ángulos de un cuadrilátero?

Observa la figura y fíjate en que la diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos, y los ángulos de cada triángulo suman 180º, luego los ángulos del cuadrilátero suman:

180º + 180º = 360º

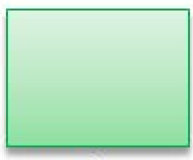
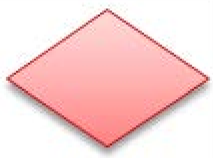
Clases de cuadriláteros

Los cuadriláteros se clasifican según tengan sus lados paralelos o no.

 PARALELOGRAMO	 TRAPECIO	 TRAPEZOIDE
Lados paralelos dos a dos	Dos lados paralelos	Ningún lado paralelo a otro

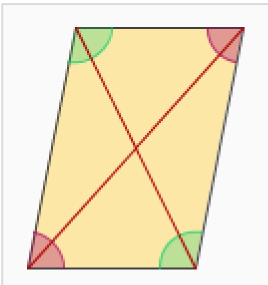
Paralelogramos

Hay cuatro tipos de **paralelogramos**, según sean sus lados y ángulos iguales o distintos:

 CUADRADO	 RECTÁNGULO	 ROMBO	 ROMBOIDE
Lados y ángulos iguales	Los cuatro ángulos son iguales (90º)	Los cuatro lados son iguales	Lados y ángulos distintos

En todos los **paralelogramos** se cumple:

- Los lados opuestos son iguales.
- Los ángulos opuestos son iguales.
- Los ángulos consecutivos son suplementarios (suman 180º).
- Los dos triángulos en que lo divide cada diagonal son iguales.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.



Verdadero o falso

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

	Verdadero	Falso
En todos los paralelogtramos las dos diagonales se cortan en el punto medio.	○	○
En todos los paralelogramos las diagonales miden lo mismo.	○	○
Dos ángulos opuestos de un paralelogramo miden 60º y los otros dos miden 120º.	○	○
Un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales es siempre un cuadrado.	○	○
Los trapecios tienen sólo dos lados paralelos.	○	○
Las diagonales de un rombo son perpendiculares.	○	○

2.3. Polígonos regulares

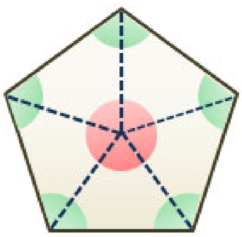
- Un **polígono** es **regular** si tiene todos los lados iguales y todos los ángulos iguales.

En un polígono regular se distinguen, además de los vértices, los ángulos y los lados, los siguientes elementos:

- El **centro**, punto que equidista de todos los vértices.
- El **radio**, segmento que une el centro con un vértice.
- La **apotema**, segmento que une el centro con el punto medio de un lado. Observa que apotema y lado son perpendiculares.

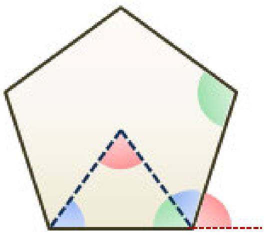
Los polígonos regulares de tres lados son los *triángulos equiláteros* y los de cuatro lados son los *cuadrados*. A partir de cinco lados se añade a su nombre el adjetivo *"regular"*: *pentágono regular, exágono regular,... etc.*

Ángulos de un polígono regular



El **ángulo central** es el formado por dos radios consecutivos.
Mide *360º/n* donde ***n*** es el número de lados del polígono.

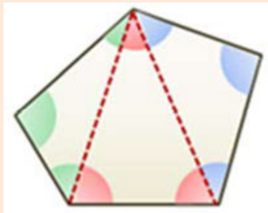
Ángulo interior es el formado por dos lados consecutivos.
Es suplementario del ángulo central, es decir entre los dos suman 180º.



más...

Los ángulos de un polígono

Cualquier polígono convexo, regular o no, se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene menos dos. Para ello basta trazar las diagonales desde uno cualquiera de sus vértices.



Como los ángulos de cada triángulo suman 180º, resulta que la suma de los ángulos de un polígono convexo es de n lados es

$(n-2)\cdot180º$

Si el polígono es regular todos sus ángulos son iguales, por tanto cada uno medirá:

$\mathbf{(n-2)\cdot 180/n}$

Que es otra forma de calcularlo.

más...

Unidades agrarias

Para medir la extensión de los campos, sobre todo los de cultivo, muchas veces habrás visto emplear otras medidas de superficie, son las llamadas unidades agrarias.

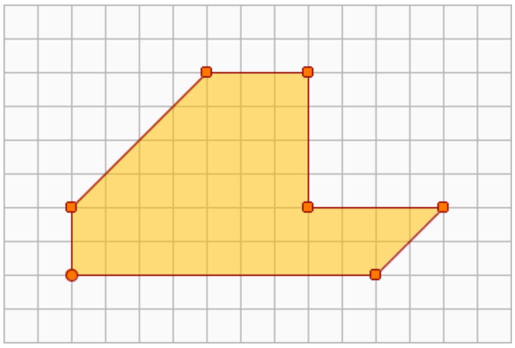
- La *hectárea* (***ha***), que equivale a 1 hm^2.
- El *área* (***a***), que equivale a 1 dam^2.
- La *centiárea* (***ca***), que equivale a 1 m^2.

Una hectárea equivale a cien áreas, la hectárea es un múltiplo del área, y la centiárea un submúltiplo, una centiárea es la centésima parte de un área.

1 hm^2	1 dam^2	1 m^2
1 ha	**1 a**	**1 ca**
100 a	1 a	0,01 a

3. Medidas en el plano

3.1. Unidades de superficie



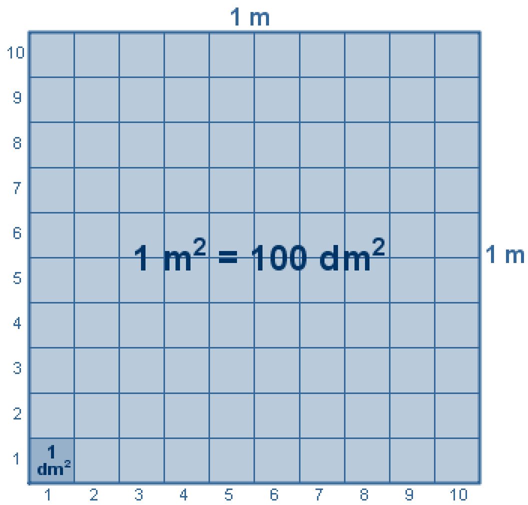
Para medir cualquier superficie, como la del polígono de la derecha, elegiremos en primer lugar la unidad que vamos a utilizar. Si tomamos por ejemplo un cuadradito, el área de la figura será de 40 cuadraditos, ¿cuál sería el área de la figura si tomamos como unidad de medida 4 cuadraditos?.

- El **área** de una figura plana es la medida de la superficie que ocupa.
- El **perímetro** de una figura plana es la medida de su contorno. Si se trata de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

En este apartado vas a aprender a calcular la medida de áreas y perímetros de polígonos.

El metro cuadrado

La unidad principal para medir superficies es el **metro cuadrado**, se representa **m²** y es la superficie de un cuadrado de 1 m de lado.



Para medir superficies muy grandes o muy pequeñas se utilizan *múltiplos* o *submúltiplos* del metro cuadrado.

Así 1 dm^2 es la superficie de un cuadrado de 1 dm de lado, y 1 dam^2 la de un cuadrado de 1dam de lado.

¿Cuántos dm^2 caben en un m^2?.

Observa la figura y comprueba que caben 10 de largo por 10 de alto, en total 10x10=100.

$$\mathbf{1\ m^2 = 100\ dm^2}$$

Igualmente como 1 dam = 10 m,

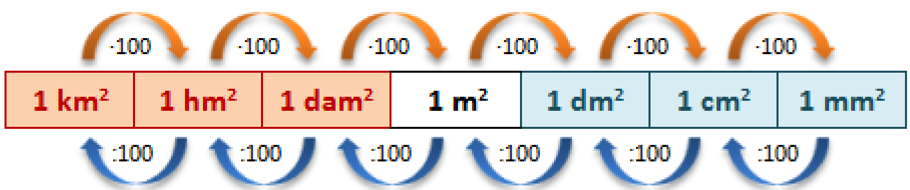
$$\mathbf{1\ dam^2 = 100\ m^2}$$

Así de 100 en 100 podemos construir los submúltiplos y múltiplos del m^2.

MÚLTIPLOS		SUBMÚLTIPLOS
• $\mathbf{km^2}$ *(kilómetro cuadrado)* • $\mathbf{hm^2}$ *(hectómetro cuadrado)* • $\mathbf{dam^2}$ *(decámetro cuadrado)*	m^2	• $\mathbf{dm^2}$ *(decímetro cuadrado)* • $\mathbf{cm^2}$ *(centímetro cuadrado)* • $\mathbf{mm^2}$ *(milímetro cuadrado)*

Pasar de unas unidades a otras

Como has visto las unidades de superficie van de "cien en cien", es decir que cien unidades de un orden determinado hacen una unidad del orden inmediatamente superior, como 100 dm^2 son un m^2 y 100 cm^2 son 1 dm^2. Fíjate en la imagen siguiente.



- Para **pasar de una unidad** de superficie a otra de orden **inferior** hay que **multiplicar** por 100 tantas veces como "saltos" haya entre la unidad que nos dan y la que queremos conseguir.
- Para **pasar de una unidad** de superficie a otra de orden **superior** hay que **dividir** por 100 tantas veces como "saltos" haya entre la unidad que tenemos y la que queremos conseguir.

Ejemplos

$2{,}5\ m^2 = 250\ dm^2 = 25\ 000\ cm^2$	$3581\ cm^2 = 35{,}81\ dm^2 = 0{,}3581\ m^2$
$0{,}325\ hm^2 = 32{,}5\ dam^2 = 32\ 500\ m^2$	$1342\ m^2 = 13{,}42\ dam^2 = 0{,}1342\ hm^2$
$15\ km^2 = 15\ 000\ 000\ m^2$	$125\ dm^2 = 0{,}0125\ m^2$

Relaciona

Indica la unidad más conveniente para medir cada superficie

La superficie de una finca		m^2
La superficie de un campo de fútbol		km^2
La superficie de una tarjeta de crédito		hm^2
La superficie de un piso		cm^2
La superficie de España		dam^2

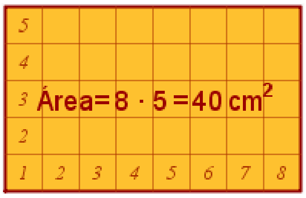
Relaciona

Une las cantidades que sean equivalentes

$1{,}7\ dm^2$		$1700\ dm^2$
$17\ m^2$		$170\ cm^2$
$0{,}17\ m^2$		$0{,}017\ km^2$
$0{,}17\ dm^2$		$17\ dm^2$
$170\ dam^2$		$17\ cm^2$

3.2. Perímetros y áreas

Área del rectángulo



Observa el rectángulo de la izquierda, contiene 40 cuadraditos, si cada uno mide 1 cm², su área es 40 cm².

Esta área se puede calcular directamente multiplicando las dimensiones del rectángulo, la base por la altura.

Área = 8 · 5 = 40 cm^2

- El área de un rectángulo de base b y altura h es: ***Área*** $_{rectángulo}$ **= *b · h***

¿Qué ocurre cuando la base y la altura son iguales, esto es cuando se trata de un **cuadrado**?. Observa que basta elevar el lado al "cuadrado".

Área $_{cuadrado}$ **= *lado²***

Ejemplos

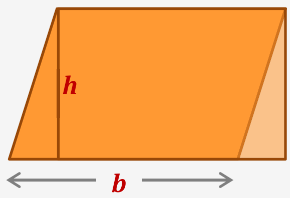
- *¿Cuántos metros de valla se necesitan para cercar una parcela rectangular de 25 m x 40 m?. ¿Cuál es la superficie de la parcela?.*
  Para saber los metros de valla necesarios hay que calcular el perímetro del rectángulo → 2 · 25 + 2 · 40 =130 m
  El área → 25 · 40 = 1000 m²

- *¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de área 144 m²?.*
  Como lado² = 144 m², para conocer el lado hay que calcular la raíz cuadrada de 144 que es 12, ya que 12² = 144
  Los cuatro lados son iguales, luego el perímetro es → 4 · 12 = 48 m

Área del romboide

El área de un romboide de base **b** y altura **h**, es la misma que la del rectángulo de la misma base e igual altura

- *Para calcular el área de un romboide se multiplica la base por la altura.*



Área del rectángulo

A = base × altura = b · h

Área del romboide

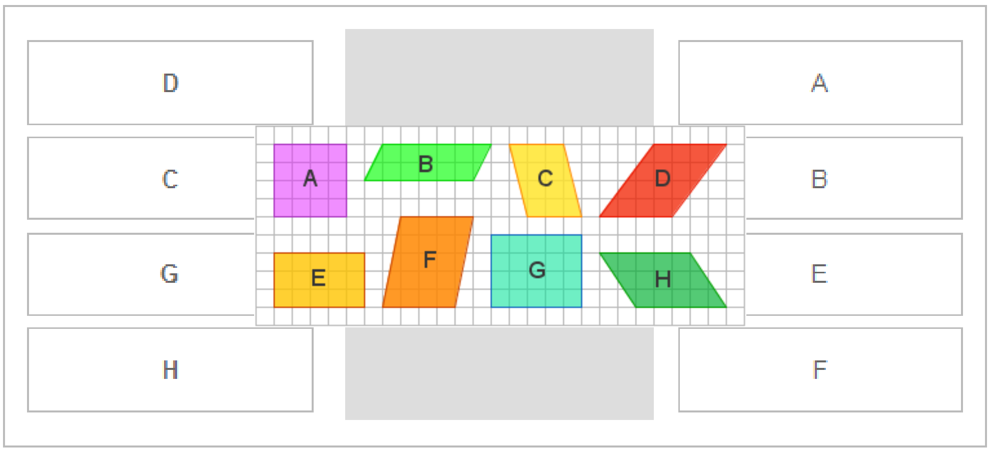
A = b · h

Ejemplo

- *¿Cuál es el área de un romboide de 12 cm de base y altura 8 cm?*
  Área → 12 · 8 = 96 cm²

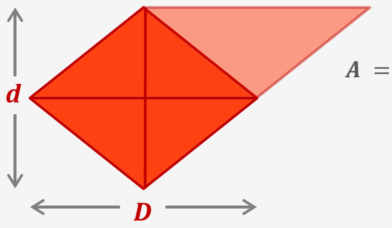
Relaciona

De los paralelogramos de la imagen, empareja los que tengan la misma área.



Área del rombo

Observa en la imagen que el área del rombo es igual a la de un romboide que tiene por base la diagonal horizontal (D), y por altura la mitad de la otra diagonal (d).



Área del romboide

$$A = base \times altura = D \cdot \frac{d}{2}$$

Área del rombo

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

- *El área de un rombo es la mitad del producto de las dos diagonales.*

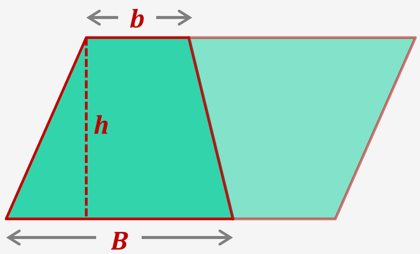
Ejemplo

- *Las diagonales de un rombo miden 20 y 16 cm, ¿cuál es su área?.*

  El área → $20 \cdot 16/2 = 160$ cm²

Área del trapecio

En la figura se muestra cómo a partir de un trapecio, se puede construir un romboide de la misma altura y base la suma de las bases del trapecio. El área del trapecio es la mitad de la del romboide.



Área del romboide

$$A = (B + b) \cdot h$$

Área del trapecio

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- *El área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura.*

Ejemplo

- *¿Cuál es el área de un trapecio de bases 12 cm y 8 cm, y altura 5 cm?*

  Área → $5 \cdot (12 + 8)/2 = 50$ cm²

Completa

25 cm²	40 cm²	16 dm
20 cm²	8 dm	3 dm

1) Las diagonales de un rombo miden 8 cm y 5 cm, su área es ______

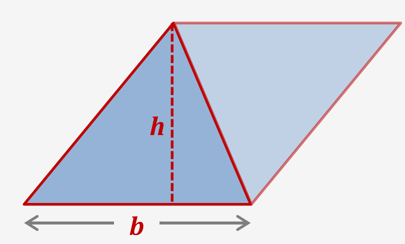
2) El área de un trapecio de bases 6 y 4 cm, y altura 5 cm es ______

3) El área de un trapecio es 21 dm², las bases miden 8 y 6 dm y la altura ______

4) El área de un rombo es 80 dm², una diagonal mide 10 dm y la otra ______

Área del triángulo

Como en los casos anteriores se puede construir un romboide de igual base y altura que el triángulo. El área del triángulo es la mitad de la del romboide.



Área del romboide

$$A = b \cdot h$$

Área del triángulo

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- *El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.*

Ejemplo

- *El área de un triángulo de base 9 dm y altura 6 dm es:*

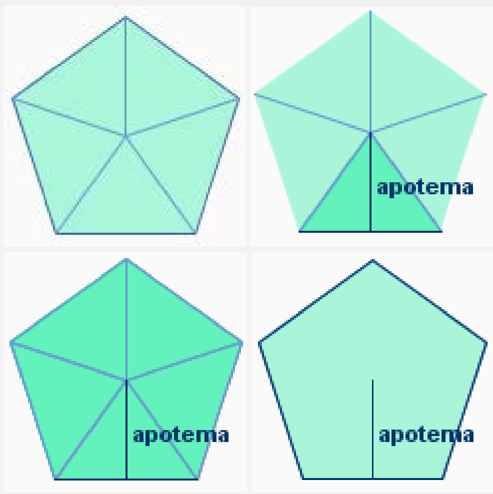
área = 9 · 6/2 = 27 dm²

Área de los polígonos regulares

Un polígono regular siempre se puede descomponer en tantos triángulos isósceles como lados tiene, todos iguales.

La altura de cada triángulo es la apotema del polígono, y la base el lado del polígono.

Todas las áreas de los triángulos son iguales y sumando todas ellas obtenemos la del polígono regular.



Se divide el polígono en **5** triángulos.

La altura de cada triángulo es la apotema y la base uno de los lados del polígono. Su área es:

$$A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{lado \cdot apotema}{2}$$

El área del polígono es la suma de las áreas de los 5 triángulos.

$$A_{polígono} = nº\ lados \cdot \frac{lado \cdot apotema}{2}$$

El número de lados por la longitud de cada lado es el **perímetro**.

$$A_{polígono} = \frac{perímetro \cdot apotema}{2}$$

- *El área de un polígono regular es la mitad del perímetro por la apotema.*

Ejemplo

- *El área de un pentágono regular de lado 7 cm y apotema 9,6 cm es:*

Área = (5 · 7 · 9,6)/2 = 168 cm²

Elige la correcta

La base de un triángulo mide 4,5 cm y la altura 6. El área del triángulo es:

- 27 cm²
- 13,5 cm²
- No se puede calcular, la altura no puede ser mayor que la base.

El área de un exágono regular de 6 cm de lado y 5,2 cm de apotema es:

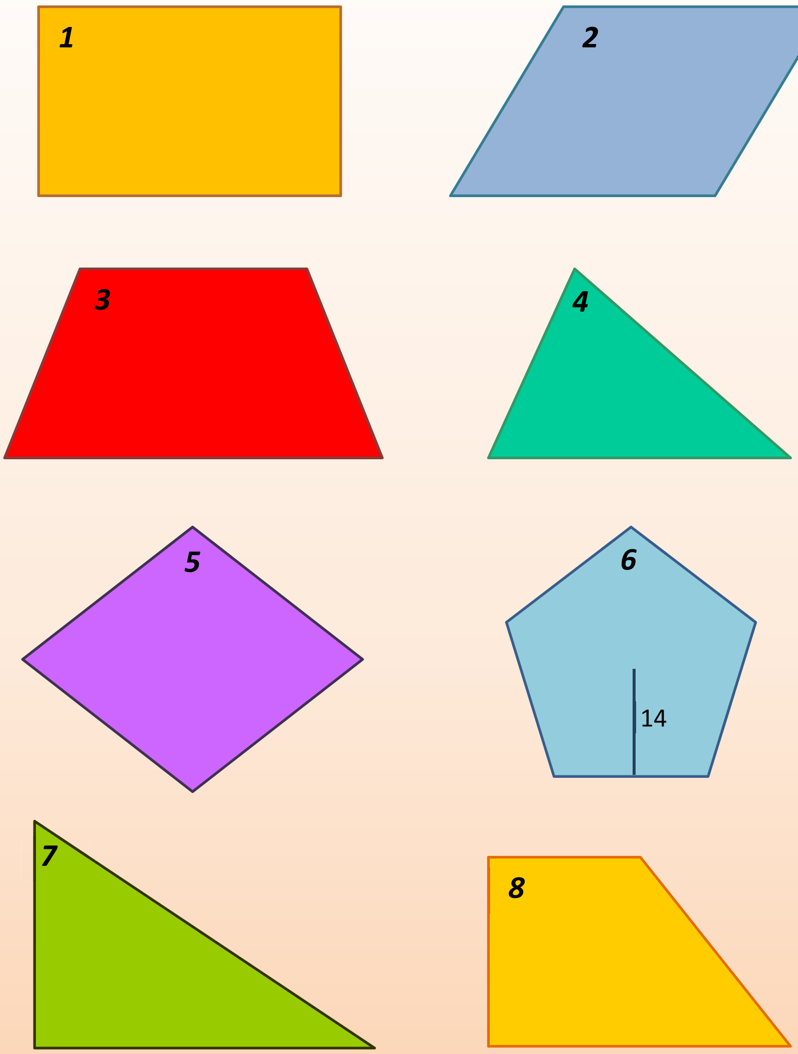
- 93,6 cm²
- 31,2 cm²
- 187,2 cm²

Los lados de un triángulo rectángulo miden 3, 4 y 5 cm.

- Su perímetro es 12 cm y su área 6 cm²
- Su perímetro es 12 cm y su área 12 cm²
- Su perímetro es 12 cm pero faltan datos para calcular el área

Practica

Con la regla toma las medidas necesarias (en mm) y calcula el área de los siguientes polígonos:



Comprueba

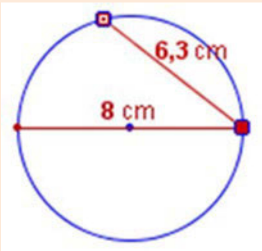
1) 1000 mm²
2) 875 mm²
3) 1000 mm²
4) 500 mm²
5) 787,5 mm²
6) 700 mm²
7) 675 mm²
8) 750 mm²

4. La circunferencia y el círculo

más...

El diámetro

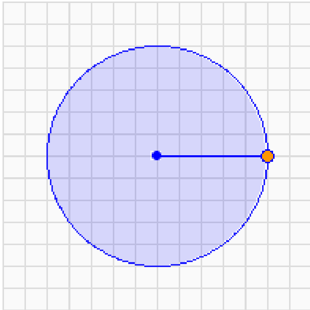
El diámetro de una circunferencia es la cuerda de mayor longitud que se puede trazar en una circunferencia, cualquier otra cuerda será más pequeña como puedes comprobar en la figura.



Radio = 4 cm

En los apartados anteriores has estudiado las figuras planas limitadas por segmentos, es decir, por trozos de líneas rectas, en este vas a ver una línea curva, la **circunferencia** y el recinto plano limitado por la circunferencia, el **círculo**.

- Una **circunferencia** es la línea formada por todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto llamado **centro**.
- El **círculo** es la región del plano limitada por una circunferencia.



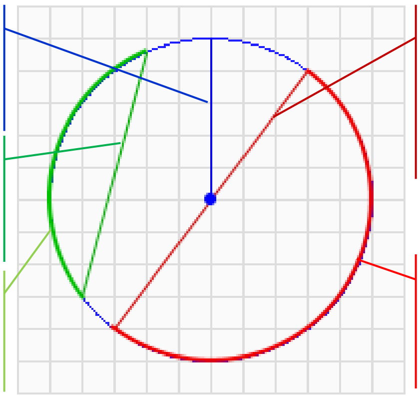
El segmento que une el centro con uno cualquiera de los puntos de la circunferencia es el **radio**. Además del radio, distinguimos otros elementos en la circunferencia.

Elementos de la circunferencia

Radio: Segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

Cuerda: Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

Arco: Cada una de las dos partes en que una cuerda divide a la circunferencia.

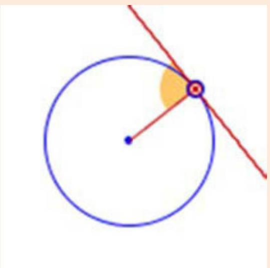


Diámetro: Cuerda que divide a la circunferencia en dos arcos iguales.
Cada diámetro mide el doble del radio.

Semicircunferencia: Cada uno de los dos arcos determinado por un diámetro.

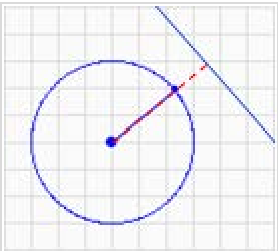
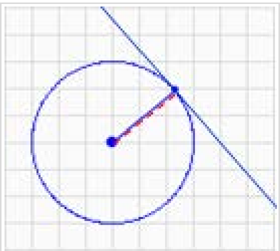
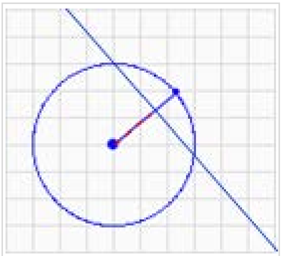
La tangente

En una circunferencia la recta tangente es **perpendicular** al radio que pasa por el punto de tangencia.



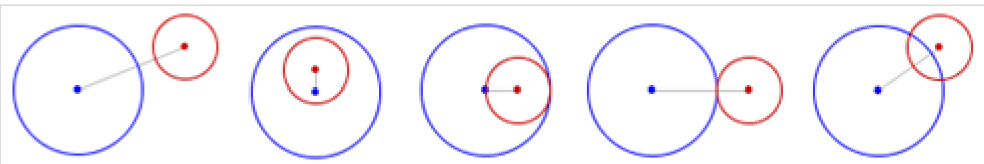
Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Una recta y una circunferencia pueden cortarse en dos puntos, sólo en uno o en ninguno. Se dirá respectivamente que son secantes, tangentes o exteriores.

EXTERIORES	TANGENTES	SECANTES
		
No se cortan	Se cortan en un punto	Se cortan en dos puntos

Posiciones relativas de dos circunferencias

Dos circunferencias también pueden cortarse en dos puntos (*secantes*), en uno sólo (*tangentes*) o en ninguno (*exteriores* o *interiores*, según una quede fuera o dentro de la otra).

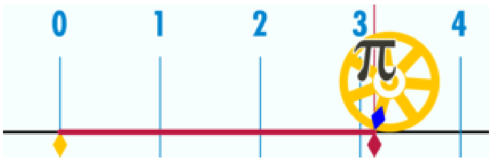
EXTERIORES	INTERIORES	TANGENTES interiores	TANGENTES exteriores	SECANTES
				
No se cortan		Se cortan en un punto		Dos puntos de corte

4.1. Longitud de la circunferencia y área del círculo

Longitud de la circunferencia

Si haces el experimento de medir con un cordel distintas circunferencias, el contorno de un plato, de un DVD o de un vaso, observarás que la división entre la longitud y el diámetro de la circunferencia, siempre da el mismo cociente, un poco más de 3.

Este número se representa con la letra griega π, se lee "pi", y su valor es aproximadamente 3,14.



$$\pi = 3{,}14\ldots$$

Para calcular la longitud de la circunferencia bastará multiplicar el diámetro por pi, y como el diámetro es igual a dos veces el radio:

$$\frac{l}{d} = \pi \;\rightarrow l = d \cdot \pi \;\rightarrow l = 2 \cdot r \cdot \pi$$

$$longitud\ de\ la\ circunferencia = 2\pi r$$

Ejemplos

- *La rueda de un coche tiene 30 cm de radio, ¿cuántos metros recorre al dar una vuelta?*

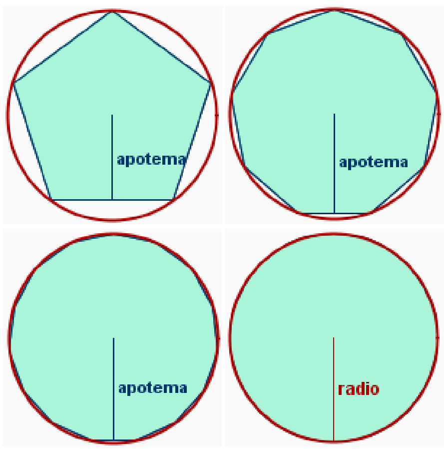
  Longitud de la circunferencia de radio 30 cm = 2·π·30
  metros que recorre: 2·3,14·30 = 188,4 cm = 1,884 m

- *¿Cuántas vueltas dará al recorrer 1 km?*

  1 km = 1000 m y una vuelta son 1,884 m
  luego en 1000 m dará 1000:1,884 = 530,78 vueltas

Área del círculo

En la imagen de la derecha puedes ver un polígono regular inscrito en una circunferencia; al aumentar el número de lados del polígono, fíjate que cuanto mayor sea ese número más se aproxima su superficie a la del círculo. Por eso para calcular el área del círculo podemos considerar a éste como un polígono regular de infinitos lados.



Al sustituir, en la fórmula del área de un polígono regular, el perímetro por la longitud de la circunferencia y la apotema por el radio obtenemos el área del círculo:

$$A = \frac{perímetro \cdot radio}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Ejemplos

- *El área de un círculo de 2 m de radio es:*

  $\pi \cdot 2^2 = 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56\ m^2$

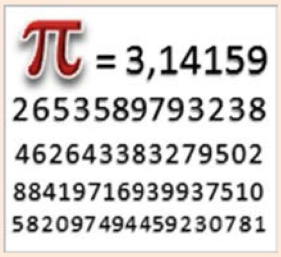
- *Una cabra está atada a un árbol en medio de un prado con una cuerda de 12 m de longitud, ¿cuál es el área del prado que se encuentra al alcance del animal?.*

  Es el área de un círculo de radio 12 m = $\pi \cdot 12^2\ m^2$
  $3{,}14 \cdot 12^2 = 3{,}14 \cdot 144 = 452{,}16\ m^2$

más...

El número pi

π es sin duda el número más famoso de las matemáticas. Su valor exacto no se puede saber ya que tiene infinitas cifras decimales que no se repiten siguiendo un patrón predecible.

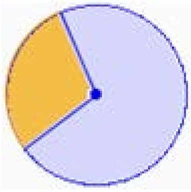
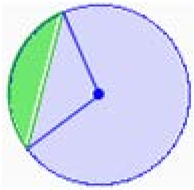
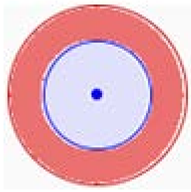
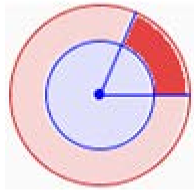


Conocido desde la antigüedad, las distintas civilizaciones han utilizado diferentes valores. En el antiguo Egipto le daban el valor 19/6; en Grecia, Arquímedes aproximó su valor por 22/7, pero fué en China donde se obtuvieron los mejores resultados, ya que en el siglo V se utilizaba como valor de π 3,1415927, resultado que no fue mejorado hasta el siglo XV.

Hoy en día los ordenadores nos permiten calcular muchísimas cifras de π, el último record está en ¡5 billones de dígitos!.

Las figuras circulares

Las partes de un círculo se llaman **figuras circulares**, fíjate en las siguientes:

SECTOR circular	SEGMENTO circular	CORONA circular	TRAPECIO circular
			
Cada una de las partes del círculo comprendida entre dos radios y el arco correspondiente.	Cada una de las partes del círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente.	Región del plano comprendida entre dos circunferencias con el mismo centro.	Cada una de las partes de una corona circular comprendida entre dos radios.

Veamos cómo se calcula el área de dos de ellas, el **sector circular** y la **corona circular**:

- Si se divide el círculo en 360 partes iguales se obtienen sectores de 1º de amplitud, el área de cada uno de estos sectores es π·r²/360, luego el área de un sector circular de amplitud un ángulo determinado será:

$$A_{SECTOR\ CIRCULAR} = \frac{\pi r^2 \cdot \text{ángulo}^\circ}{360^\circ}$$

- Para calcular el área de una corona circular se restan las áreas de los dos círculos que la componen:

$$A_{CORONA\ CIRCULAR} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Ejemplos

- *¿Cuál es el área de un sector circular de radio 8 cm y 60º de amplitud?*

  Área que corresponde a un grado → π·8²/360

  Área que corresponde a 60º → 60·π·8² /360 = 3,14·64/6 = 33,49 cm²

- *¿Cuál es el área de una corona circular de radios 7 dm y 5 dm?*

  Área del círculo mayor → π·7² = 3,14·49 = 153,86 dm²

  Área del círculo menor → π·5² = 3,14·25 = 78,5 dm²

  Área de la corona circular → 153,86 - 78,5 = 75,36 dm²,

  o bien 3,14·(7²-5²) = 3,14·(49-25) = 3,14 · 24 = 75,36 dm²

Relaciona

452,16 cm²	La distancia que recorre una rueda de una bicicleta de diámetro 70 cm, si da 100 vueltas
219,80 m	La superficie del tablero de una mesa redonda de 120 cm de diámetro
37,68 m	El recorrido del caballito de un tiovivo situado a 6 metros del centro.
1,13 m²	La superficie de un disco de 12 cm de radio.

Ejercicios

1. *Expresa en forma simple o incompleja:*

a) 12º 34’ 44’’ $\rightarrow$ segundos | *b) 100º 10’’ $\rightarrow$ segundos*

c) 56’ 42’’ $\rightarrow$ minutos | *d) 25º 24’ $\rightarrow$ grados*

2. *Expresa en forma compleja*

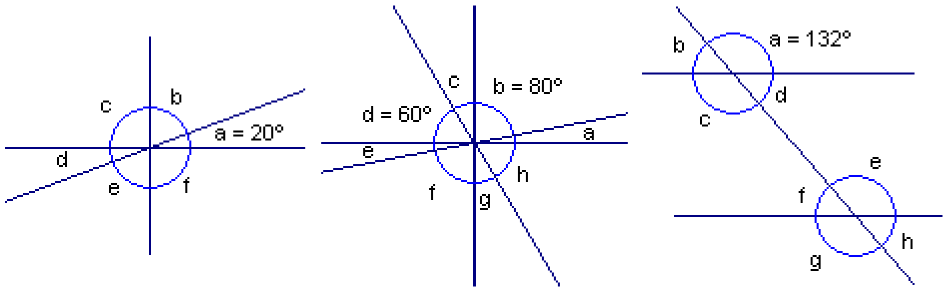
a) 10342’’ | *b) 20240’*

c) 62257’’ | *d) 6543’*

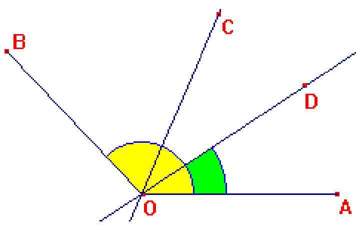
3. *Dados los ángulos $\hat{A}$ = 54º 23’ 45’’, $\hat{B}$ = 62º 43’ 26’’ y $\hat{C}$= 12º 18’ 49’’. Calcula:*

a) $\hat{A}+\hat{B}=$ *b)* $\hat{A}-\hat{C}=$ *c)* $\hat{A}+\hat{B}-\hat{C}=$

4. *Calcula los ángulos que faltan en cada figura:*



5. *En la figura el ángulo $A\hat{O}B$ =133º 4’ 30’’. Si la recta OC es la bisectriz del ángulo $A\hat{O}B$ y la recta OD la bisectriz del ángulo $A\hat{O}C$, halla la amplitud del ángulo $A\hat{O}D$.*



6. *Transforma en m² las siguientes unidades de superficie:*

a) 0,025 hm² | *b) 43212 dm²* | *c) 324 hm²*

d) 26 dam² | *e) 0,012 km²* | *f) 45,23 dam²*

7. *Reduce a incomplejo:*

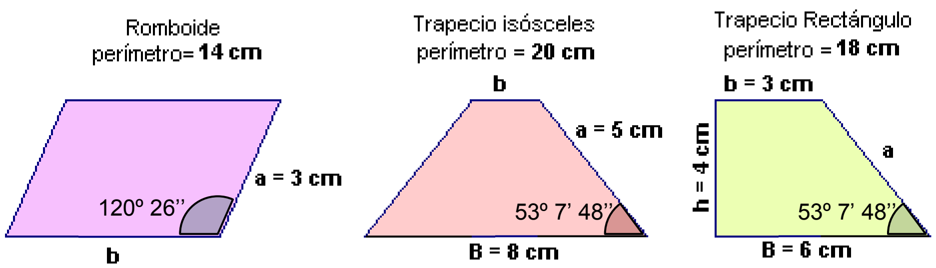
a) 57 km² , 40 hm² , 25 m² , 45 cm² $\rightarrow$ dm²

b) 7 dam² , 41 dm² , 6 cm² $\rightarrow$ m²

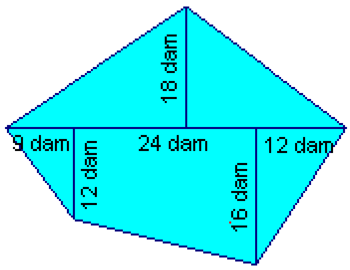
c) 0,058 hm² , 2,045 m² , 75 cm² $\rightarrow$ dm²

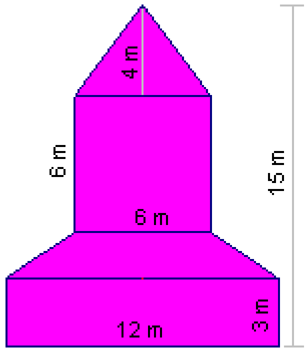
d) 3,8 hm² , 2,45 dam² , 25 m² $\rightarrow$ dam²

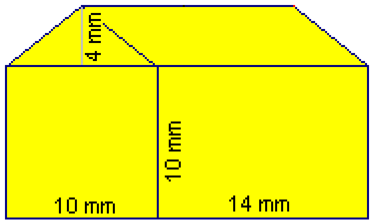
8. *Calcula los lados y los ángulos que faltan en cada polígono:*



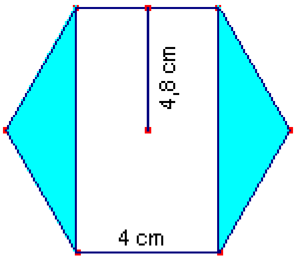
9. *Halla el área de las siguientes figuras:*

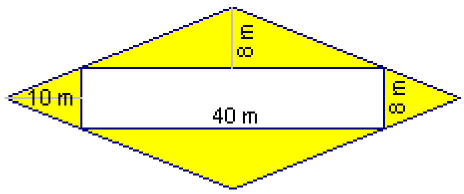






10. *Halla el área de la parte sombreada en cada figura.*

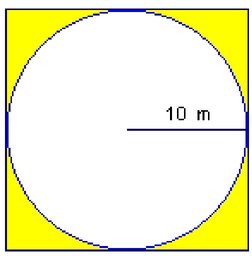


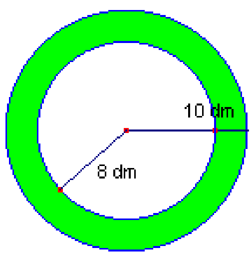


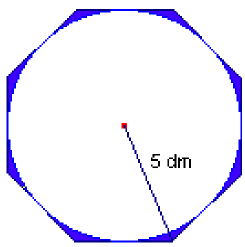
11. *El radio de la rueda grande de un velocípedo mide 84 cm y el de la pequeña 21 cm, mientras la rueda grande avanza una vuelta completa, ¿cuántas vueltas da la rueda pequeña?*

12. *El radio de la Tierra es 6370 km, si se diese una vuelta completa a la Tierra siguiendo el ecuador, ¿qué distancia se recorrería?. ¿Y si la vuelta la diera un satélite situado a 10000 m de altura?.*

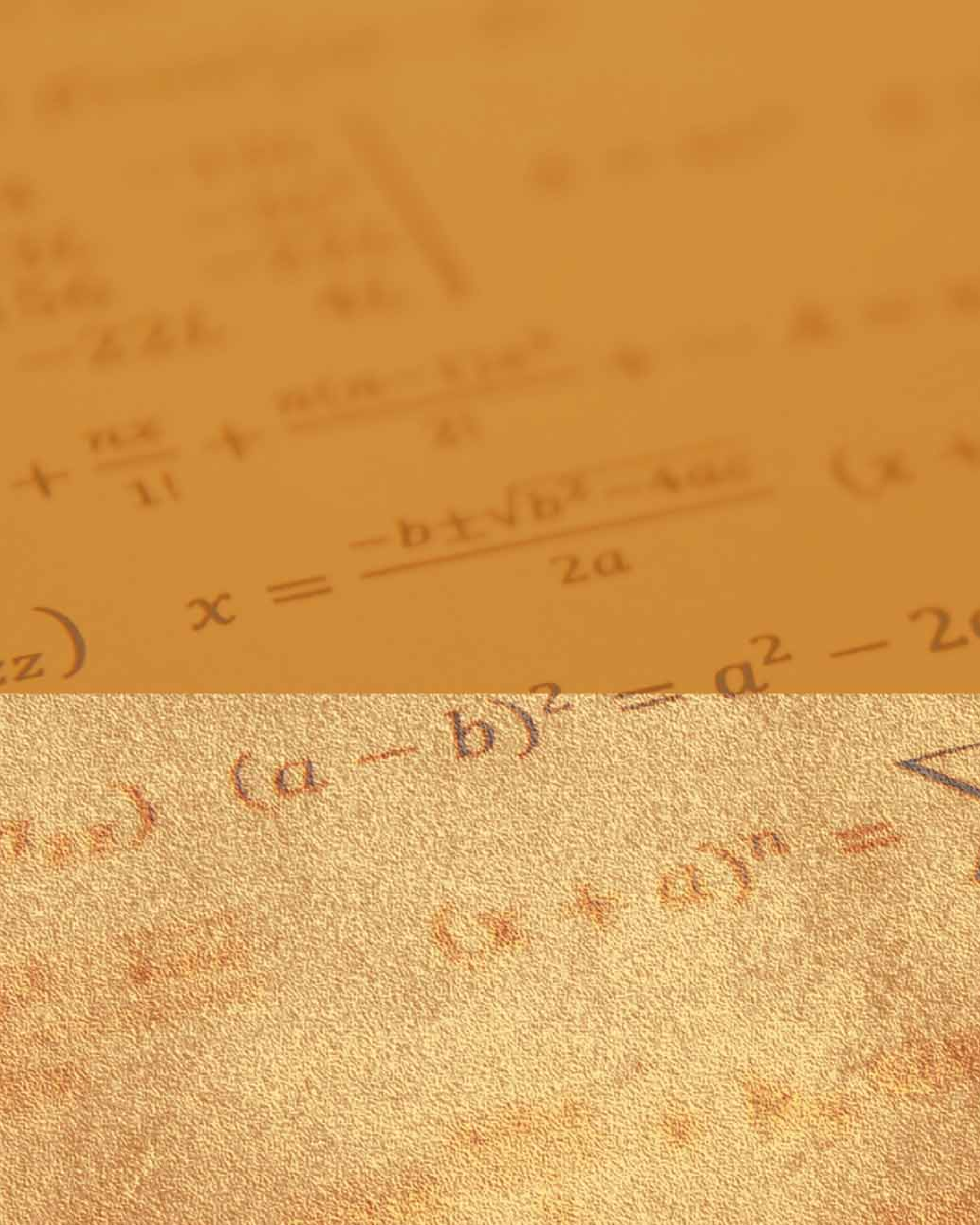
13. *Halla el área de la parte sombreada en cada figura.*







14. *Calcula el área de un círculo de 25 cm de radio y la de un sector circular perteneciente al mismo círculo de 15° de amplitud.*



FONDO
SOCIAL
EUROPEO

GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

GOBIERNO
DE ARAGON
Departamento de Educación,
Cultura y Deporte